УДК 536.2

А.Я.Карвацький, П.Й.Дудніков, С.В.Лелека

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ РАДІАЦІЙНОГО ТА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Вступ

Багато задач радіаційного теплообміну між твердими тілами складної форми розділеними діатермічною середою не мають прямого аналітичного розв'язку. Тому для розв'язання таких задач використовуються чисельні методи: зональний, Монте-Карло [1], трасування променів [2,3]. Однак для задач з дифузними границями може бути ефективно застосований метод граничних елементів (МГЕ) [4,5].

На практиці значний інтерес представляють задачі, у яких враховується складний теплообмін, наприклад, стаціонарний радіаційний і кондуктивний теплообмін без і з взаємодією між собою. Методика чисельного розв'язання задач кондуктивного теплообміну на базі МГЕ представлена у [6], а для ефективного розв'язання задач радіаційного теплопереносу і складного теплообміну треба вирішити деякі проблеми, пов'язані із:

- визначенням коефіцієнтів впливу радіаційного теплообміну діатермічної порожнини, оточеної непрозорими дифузно-відбиваючими границями;
- врахуванням при обчисленні коефіцієнтів впливу ефекту екранування променів;
- спільного розв'язання системи нелінійних рівнянь, які описують кондуктивний і радіаційний механізми теплопереносу.

Саме тому, метою роботи є розробка на базі МГЕ чисельної методики та програмного забезпечення для розв'язання задач радіаційного і складного теплообміну.

Постановка задачі

Нехай $\Omega = \bigcup_{l=1}^{W} \Omega_l \in R^3$ область, яка складається з множин Ω_l (елементів конструкції промислового устаткування), границі яких є об'єднання кусково-плоских множин $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_4$. Причому при $l = \overline{1,m},\ m < W$ розглядаються тверді тіла, в яких відбувається теплообмін теплопровідністю, а при $l = \overline{m+1,W}$ - діатермічні порожнини, між границями яких діє радіаційний механізм теплообміну. В теплопровідних тілах для врахування границі тверде тіло-розплав використовується узагальнена постановка задачі. На Γ_0 розглядаються зовнішні границі конструкції з трьома типами граничних умов (ГУ), а на Γ_4 - об'єднання контактів між різними елементами конструкції. Оскільки на Γ_0 задаються різні ГУ, то її також можна представити у вигляді об'єднань: $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, де Γ_1 - об'єднання границь з ГУ Дирихле, Γ_2 - об'єднання границь з ГУ Неймана, Γ_3 - об'єднання границь з ГУ конвективного типу. Завдяки наявності радіаційного теплообміну границя Γ_4 є також об'єднаною: $\Gamma_4 = \Gamma_{4T} \cup \Gamma_{4TR}$, де Γ_{4T} - об'єднання контактів виключно між різними теплопровідними тілами Ω, Γ_{4TR} - об'єднання границь контакту між діатермічними порожнинами та теплопровідними елементами конструкції.

Виходячи з вищеописаного, поле температури T в Ω з врахуванням складного теплообміну можна описати наступною системою рівнянь з відповідними граничними умовами:

$$\Omega_l : \begin{cases} div\left[\lambda_l(T)\nabla T(X)\right] + q_{vl}(X) = 0, \quad \left(l = \overline{1,m}\right); \\ \sigma T_{X_1}^4 - \int\limits_F \sigma T_x^4 \dfrac{\cos\varphi_{X_2}\cos\varphi_{X_1}}{\pi\left|X_2 - X_1\right|^2}\beta(X_1, X_2)dF_{X_2} = \\ = \dfrac{1}{\varepsilon_{X_1}} q_r(X_1) - \int\limits_F \dfrac{1-\varepsilon_{X_2}}{\varepsilon_{X_2}} q_r(X_2) \dfrac{\cos\varphi_{X_2}\cos\varphi_{X_1}}{\pi\left|X_2 - X_1\right|^2}\beta(X_1, X_2)dF_{X_2}, \quad \left(l = \overline{m+1,W}\right); \end{cases} \tag{1}$$

$$\Omega_{lw} : \lambda(T) = \begin{cases} \lambda_l,\ T < T_{cr} - \Delta T/2; \\ \dfrac{\lambda_w - \lambda_l}{\Delta T}(T - T_{cr}) + \dfrac{\lambda_w + \lambda_l}{2}, \quad T \in \left[T_{cr} - \dfrac{\Delta T}{2}; T_{cr} + \dfrac{\Delta T}{2}\right], \quad \left(lw = \overline{1,m}\right); \\ \lambda_w,\ T > T_{cr} + \Delta T/2; \end{cases} \tag{2}$$

$$\Gamma_0 : \begin{cases} \Gamma_1 : \quad T = T(X); \\ \Gamma_2 : \quad \mathbf{n}\left[-\lambda_l(T)\nabla T\right] = q(X); \\ \Gamma_3 : \quad \mathbf{n}\left[-\lambda_l(T)\nabla T\right] = \alpha_{\text{eff}}\left(T_{\Gamma 3} - T_{\text{d}}\right); \end{cases} \tag{3}$$

$$\Gamma_4 : \begin{cases} \Gamma_{4T} : \begin{cases} \{T\} = 0; \\ \{\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}\} = 0; \end{cases} \\ \Gamma_{4TR} : \begin{cases} \{T\} = 0; \\ \mathbf{n}\left[-\lambda_l(T)\nabla T\right] = q_r. \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

де $\lambda(T)$ – теплопровідність, Вт/(м·К); T – температура, К; ∇ – оператор Гамільтона; $X_1(x,y,z) \cup X_2(x,y,z) \in X(x,y,z) \in \Omega$ – декартові координати, м; q_v – щільність внутрішнього джерела теплоти, Вт/м^3; σ – стала Стефана-Больцмана, Вт/(м^2·К^4); F – поверхня діатермічної області; $|X_2 - X_1| = r$ – відстань між точками X_2 і X_1, які лежать на поверхні F, м; X_1 – точка джерела випромінювання, а X_2 – поточна точка; ε – степінь чорноти поверхні F; $\varphi_{X_1}, \varphi_{X_2}$ – кути між нормалями до поверхні F в точках X_1, X_2 і вектором $\mathbf{r}$, рад; q_r – щільність результуючого радіаційного потоку, Вт/м^2; T_{cr} – температура кристалізації, К; ΔT - інтервал згладжування, К; $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до границі Γ; α_{eff} – ефективний коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м^2·К); T_d – температура довкілля, К; $\{T\} = T^+ - T^-$, $T^{\pm}$ – значення функції праворуч та ліворуч від Γ_4, К; $\{\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{q}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{q}^-$; $\mathbf{q}$ – вектор щільності теплового потоку, Вт/м^2; Ω_{1w} - об'єднана область тверде тіло-розплав; W – кількість областей (елементів конструкції); $\beta(X_1, X_2) = \begin{cases} 1 - \text{êîëè òî÷êó } X_1 \text{ âèäíî ç òî÷êè } X_2 \\ 0 - \text{êîëè íå âèäíî} \end{cases}$.

Таким чином система інтегро-диференціальних рівнянь (1) спільно з граничними умовами (3),(4) є повним математичним формулюванням поставленої задачі.

Методика чисельного розв'язання

Методика чисельного розв'язання рівняння теплопровідності, яке входить в систему (1), достатньо повно викладена в [6], тому зосередимось на розгляді методики розв'язання інтегрального рівняння системи (1).

Спочатку виконаємо деякі перетворення. Для цього інтегральне рівняння радіаційного теплопереносу системи (1) запишемо у дискретній формі при умові, що на Γ_j величини T^4, q_r приймаються постійними

$$\sum_{j=1}^{N} H_{ij} T_i^4 = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} q_{rij}, \; i = \overline{1,N}, \qquad (5)$$

де H и G – коефіцієнти впливу для температури та щільності теплового потоку випромінюванням; N – кількість вузлів на границі поверхні Γ; i – індекс джерела випромінювання; j – індекс поточного вузла; Γ_j – елемент розбиття поверхні Γ;

$$H_{ij} = \delta_{ij}\sigma - \sigma \int_{\Gamma_j} K(X_1, X_2)\, d\Gamma, \quad i, j = \overline{1,N}, \qquad (6)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{\varepsilon_i(X_1)} - \int_{\Gamma_j} \frac{1 - \varepsilon_j(X_2)}{\varepsilon_j(X_2)} K(X_1, X_2)\, d\Gamma, \quad i, j = \overline{1,N}, \qquad (7)$$

δ_{ij} - символ Кронекера; $K(X_1, X_2) = \dfrac{\cos\varphi_{X_2} \cos\varphi_{X_1}}{\pi |X_2 - X_1|^2} \beta(X_1, X_2)$.

Припустимо, що степінь чорноти не залежить від X_2, тобто $\varepsilon_j(X_2) = const$ на Γ_j. Таке припущення дозволяє спростити та значно скоротити об'єм обчислень при визначенні H і G.

Тоді вираз (7) приймає вид

$$G_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1 - \varepsilon_j}{\varepsilon_j} \int_{\Gamma_j} K(X_1, X_2)\, d\Gamma, \quad i, j = \overline{1,N} \qquad (8)$$

З врахуванням (8) формули для визначення коефіцієнтів впливу можна представити в вигляді

$$H_{ij} = \delta_{ij}\sigma - \sigma h_{ij}, \quad i, j = \overline{1,N}, \qquad (9)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1 - \varepsilon_j}{\varepsilon_j} h_{ij}, \quad i, j = \overline{1,N}, \qquad (10)$$

де $h_{ij} = \int_{\Gamma_j} K(X_1, X_2)\, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \dfrac{\cos\varphi_{X_2} \cos\varphi_{X_1}}{\pi |X_2 - X_1|^2} \beta(X_1, X_2)\, d\Gamma$. (11)

Таким чином, визначення коефіцієнтів впливу зведено до обчислення тільки одного інтеграла (11). Формули (9) і (10) справедливі для одинарних вузлів при лінійних елементах (або для постійних елементів). При подвійних вузлах ситуація дещо інша:

$$H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{M} H_{ij}, \; i = \overline{1,N} \Rightarrow H_{ii} \le \sigma, \qquad (12)$$

$$G_{ii} = \frac{1}{\varepsilon_i} \times \frac{H_{ii}}{\sigma}, \; i = \overline{1,N}. \qquad (13)$$

Формули (12) і (13) справедливі як для подвійних, так і для одинарних вузлів. Проте, при одинарних або центральних вузлах маємо, що

$\dfrac{H_{ii}}{\sigma} = 1$, тому справедливо $H_{ii} = \sigma$, $G_{ii} = \dfrac{1}{\varepsilon_i}$.

Порядок визначення h_{ij} залежить від виду вибраних граничних елементів, які отримують в результаті дискретизації граничної поверхні оболонки. За граничні елементи виберемо трикутні лінійні елементи [6]. При цьому нумерація вершин трикутників, які обмежують вузол j, виконується таким чином, щоб вершина, яка співпадає з вузлом j, мала номер 3, в кожному із вказаних трикутників.

Введемо функцію

$$P = T^4 .$$

В кожному трикутнику функція змінюється за лінійним законом, наприклад, P і q_r

$$\begin{cases} P(\eta_1,\eta_2) = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3(1-\eta_1-\eta_2), \\ q_r(\eta_1,\eta_2) = q_{r1}\eta_1 + q_{r2}\eta_2 + q_{r3}(1-\eta_1-\eta_2), \end{cases} \tag{14}$$

координати

$$\begin{cases} x(\eta_1,\eta_2) = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3(1-\eta_1-\eta_2), \\ y(\eta_1,\eta_2) = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + y_3(1-\eta_1-\eta_2), \\ z(\eta_1,\eta_2) = z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + z_3(1-\eta_1-\eta_2), \end{cases}$$

де індекси 1,2,3 – відносяться до номерів вершин трикутників; (η_1,η_2) – косокутна система координат, $\eta_i \in [0;1]$, $i=\overline{1,2}$, $\eta_1+\eta_2 \le 1$.

Щоб зберегти форму граничних рівнянь МГЕ (5) разом з використанням (9),(10), запишемо h_{ij} (11) відносно вузлових поверхневих точок j. В цьому випадку коефіцієнт h_{ij} навіть при використанні лінійних елементів стає незалежним від функції або потоку і може бути обчислений наперед. У відповідності з [6] отримуємо

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{L}\left\{ |J_k| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\eta_1} (1-\eta_1-\eta_2) K(\eta_1,\eta_2) d\eta_2 \right] d\eta_1 \right\}_k , \tag{15}$$

де L – кількість трикутників, які обмежують вузол j; k – індекс трикутника.

Підставимо K із (11) в (15), отримаємо

$$h_{ij} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{L}\left\{ |J_k| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\eta_1} (1-\eta_1-\eta_2) \frac{\cos[\varphi_i(\eta_1,\eta_2)]\cos[\varphi_j(\eta_1,\eta_2)]}{r^2(i,\eta_1,\eta_2)} \beta(i,\eta_1,\eta_2) d\eta_2 \right] d\eta_1 \right\}_k , \tag{16}$$

де $r^2(i,\eta_1,\eta_2) = [x_i - x(\eta_1,\eta_2)]^2 + [y_i - y(\eta_1,\eta_2)]^2 + [z_i - z(\eta_1,\eta_2)]^2, i=\overline{1,N}$; $|J_k|$ – якобіан;

$$\cos[\varphi_i(\eta_1,\eta_2)] = \frac{[x_i - x(\eta_1,\eta_2)]n_{xi} + [y_i - y(\eta_1,\eta_2)]n_{yi} + [z_i - z(\eta_1,\eta_2)]n_{zi}}{\sqrt{[x_i - x(\eta_1,\eta_2)]^2 + [y_i - y(\eta_1,\eta_2)]^2 + [z_i - z(\eta_1,\eta_2)]^2}}, \tag{17}$$

$$\cos[\varphi_j(\eta_1,\eta_2)] = \frac{[x(\eta_1,\eta_2) - x_i]n_{xj} + [y(\eta_1,\eta_2) - y_i]n_{yj} + [z(\eta_1,\eta_2) - z_i]n_{zj}}{\sqrt{[x_i - x(\eta_1,\eta_2)]^2 + [y_i - y(\eta_1,\eta_2)]^2 + [z_i - z(\eta_1,\eta_2)]^2}}, \tag{18}$$

З врахуванням (17) і (18) для (16) отримаємо

$$\begin{aligned} h_{ij} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{L}\Bigg\{ |J_k| \int_0^1 \Bigg[\int_0^{1-\eta_1} (1-\eta_1-\eta_2) \frac{[x_i - x(\eta_1,\eta_2)]n_{xi} + [y_i - y(\eta_1,\eta_2)]n_{yi} + [z_i - z(\eta_1,\eta_2)]n_{zi}}{\{[x_i - x(\eta_1,\eta_2)]^2 + [y_i - y(\eta_1,\eta_2)]^2 + [z_i - z(\eta_1,\eta_2)]^2\}^2} \times \\ \times \frac{[x(\eta_1,\eta_2) - x_i]n_{xj} + [y(\eta_1,\eta_2) - y_i]n_{yj} + [z(\eta_1,\eta_2) - z_i]n_{zj}}{\{[x_i - x(\eta_1,\eta_2)]^2 + [y_i - y(\eta_1,\eta_2)]^2 + [z_i - z(\eta_1,\eta_2)]^2\}^2} \beta(i,\eta_1,\eta_2) d\eta_2 \Bigg] d\eta_1 \Bigg\}_k \end{aligned} \tag{19}$$

Інтеграл (19) можна визначити чисельно з використанням квадратурної формули Хамера [5]

$$\begin{aligned} h_{ij} \approx \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{L}\Bigg\{ |J_k| \sum_{\mu=1}^{n} \Bigg[(1-\eta_{1\mu}-\eta_{2\mu}) \frac{[x_i - x_{jk\mu}]n_{xi} + [y_i - y_{jk\mu}]n_{yi} + [z_i - z_{jk\mu}]n_{zi}}{\{[x_i - x_{jk\mu}]^2 + [y_i - y_{jk\mu}]^2 + [z_i - z_{jk\mu}]^2\}^2} \times \\ \times \frac{[x_{jk\mu} - x_i]n_{xj} + [y_{jk\mu} - y_i]n_{yj} + [z_{jk\mu} - z_i]n_{zj}}{\{[x_i - x_{jk\mu}]^2 + [y_i - y_{jk\mu}]^2 + [z_i - z_{jk\mu}]^2\}^2} \beta(i,\eta_{1\mu},\eta_{2\mu}) \Bigg] \omega_\mu \Bigg\} \end{aligned} , \tag{20}$$

де $\eta_{1\mu},\eta_{2\mu},\omega_\mu$ – вузли та вага квадратурної формули по симплексу; n – число вузлів квадратурної формули Хамера; n_x, n_y, n_z – направляючі косинуси зовнішньої нормалі до площини [6]; $x_{jk\mu}, y_{jk\mu}, z_{jk\mu}$ – координати вузлів [6].

Визначення $\beta(X_1,X_2)$. Нехай у просторі маємо трикутник з вершинами $1(x_1,y_1,z_1)$, $2(x_2,y_2,z_2)$, $3(x_3,y_3,z_3)$ и вектор **AB** з вершинами $A(x_A,y_A,z_A)$ и $B(x_B,y_B,z_B)$ (рис. 1). Необхідно визначити умови, при яких вектор **AB** перетинає внутрішність трикутника $\Delta 123$.

Припущення 1. Точки 1, 2 и 3 не лежать на одній прямій.

Умова перевірки

$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$ або $\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

<u>Припущення 2.</u> Точки *A* і *B* лежать по різні боки від площини, в якій лежить $\Delta 123$.

Умова перевірки

$$\begin{vmatrix} x_A\text{-}x_1 & y_A\text{-}y_1 & z_A\text{-}z_1 \\ x_2\text{-}x_1 & y_2\text{-}y_1 & z_2\text{-}y_1 \\ x_3\text{-}x_1 & y_3\text{-}y_1 & z_3\text{-}z_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_B\text{-}x_1 & y_B\text{-}y_1 & z_B\text{-}z_1 \\ x_2\text{-}x_1 & y_2\text{-}y_1 & z_2\text{-}z_1 \\ x_3\text{-}x_1 & y_3\text{-}y_1 & z_3\text{-}z_1 \end{vmatrix} < 0 .$$

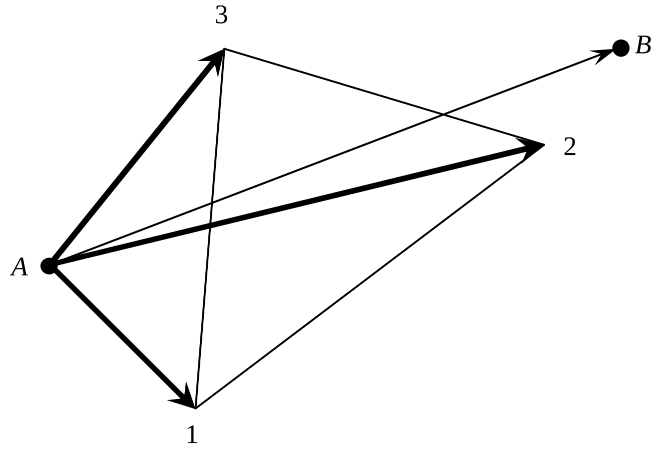


Рис. 1. Схема для обчислення $\beta(X_1, X_2)$

При даних припущеннях вектори $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A1}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{A2}$ и $\mathbf{r}_3 = \mathbf{A3}$ утворюють базис простору R^3. Представимо вектор $\mathbf{AB}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ і $\mathbf{r}_3$:

$$\mathbf{AB} = \alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2 + \gamma \mathbf{r}_3 . \tag{21}$$

Тоді вектор $\mathbf{AB}$ перетинає внутрішність $\Delta 123$ тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0 . \tag{22}$$

Позначимо $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$. Для визначення α, β, γ помножимо рівність (21) скалярно на $\mathbf{r}_i, i = \overline{1,3}$. Отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) = \alpha \mathbf{r}_1^2 + \beta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) = \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \beta \mathbf{r}_2^2 + \gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{r}_3) = \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + \beta(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + \gamma \mathbf{r}_3^2 \end{cases} . \tag{23}$$

Для скорочення кількості арифметичних операцій при обчисленні $\beta(X_1, X_2)$ розв’язання системи (23) проводиться наступним чином. Визначник матриці системи (23) можна обчислювати за допомогою алгебраїчних доповнень A_{ij}, $i, j = \overline{1,3}$

$$\Delta = \mathbf{r}_1^2 \cdot A_{11} + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \cdot A_{12} + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \cdot A_{13} .$$

Складемо матрицю алгебраїчних доповнень з врахуванням симетрії (23)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Умова (22) виконується, якщо всі компоненти вектора

$$\Delta \cdot A \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{r}_3) \end{pmatrix}$$

невід’ємні, тобто

$$\begin{cases} \Delta\left(A_{11}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) + A_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) + A_{13}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_3)\right) > 0 \\ \Delta\left(A_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) + A_{22}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) + A_{23}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_3)\right) > 0 \\ \Delta\left(A_{13}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) + A_{23}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) + A_{33}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_3)\right) > 0 \end{cases} . \tag{24}$$

Після виконання розрахунків всіх коефіцієнтів для кожного із елементів множини Ω можна записати систему нелінійних алгебраїчних рівнянь у відповідності з граничними умовами (3), (4). У векторній формі запису, після виконання часткової лінеаризації за методом Ньютона [6], система рівнянь стає лінійною і має вигляд

$$\begin{cases} \mathbf{H}_\lambda \varphi^k = \mathbf{G}_\lambda \mathbf{q}^k + \mathbf{B} \\ \left\{ \mathbf{H}_\lambda \left[\bar{\lambda}\left(T^k\right) + \frac{\partial \bar{\lambda}\left(T^k\right)}{\partial T} \mathbf{T}^k \right] + \mathbf{G}_\lambda \alpha \right\} \cdot \delta \mathbf{T}^{k+1} = -\mathbf{H}_\lambda \varphi^k + \mathbf{G}_\lambda \alpha \left(T_{ä} - \mathbf{T}^k \right) + \mathbf{B} \\ \mathbf{H}_\lambda \left[\bar{\lambda}\left(T^k\right) + \frac{\partial \bar{\lambda}\left(T^k\right)}{\partial T} \mathbf{T}^k \right] \cdot \delta \mathbf{T}^{k+1} = -\mathbf{H}_\lambda \varphi^k + \mathbf{G}_\lambda \mathbf{q}^k + \mathbf{B} \\ \mathbf{H}_r \mathbf{P}^k = \mathbf{G}_r \mathbf{q}^k \\ 4\mathbf{H}_r \left(T^k\right)^3 \delta \mathbf{T}^{k+1} = -\mathbf{H}_r \mathbf{P}^k + \mathbf{G}_r \mathbf{q}^k \end{cases} \quad (25)$$

де $\mathbf{H}_\lambda$, $\mathbf{G}_\lambda$ – відносяться до теплопровідності; $\mathbf{H}_r$, $\mathbf{G}_r$ – відносяться до радіаційного теплообміну; $\varphi^k = \int_0^{T^k} \lambda(T) dT$ – пряме перетворення Кірхгофа [5,6]; **B** – вектор, пов'язаний з внутрішнім джерелом теплоти.

Температура визначається в ітераційному циклі із розв'язку (25) за формулою $\mathbf{T}^{k+1} = \mathbf{T}^k + \delta \mathbf{T}^{k+1}$. Перші три рівняння відносяться до кондуктивного теплообміну при граничних умовах (3),(4), а два останніх – до радіаційного теплообміну при ГУ Дирихле, Неймана і контакту. Тобто при радіаційному теплообміні ГУ конвективного типу не розглядаються.

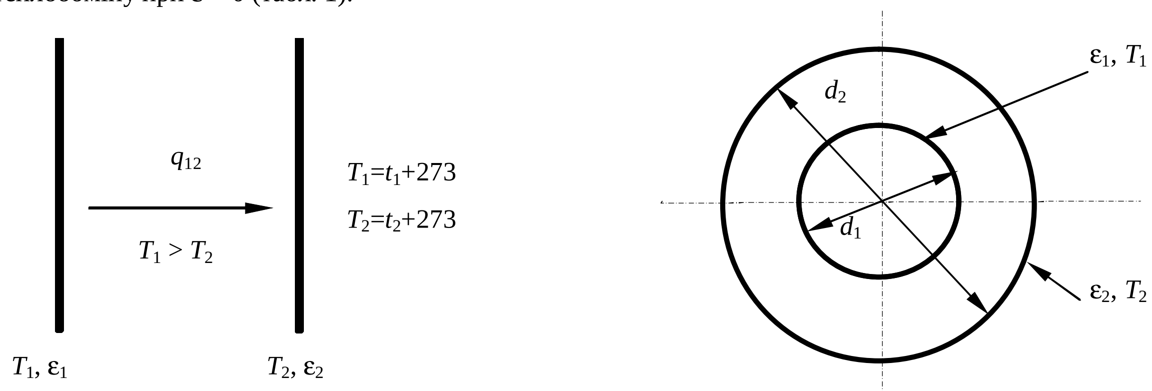
Розв'язання системи (25) здійснюється за допомогою методу Гауса з врахуванням стрічкової структури матриці. Після розв'язання системи (25) визначаються невідомі температури і щільності нормальних потоків на границях [6].

Програмне забезпечення. Результати тестування

Програмне забезпечення представлене в [6], було доопрацьовано в частині забезпечення розрахунків радіаційного теплообміну між тілами складної форми з врахуванням екранування поверхонь. При цьому були внесені зміни у файл завдань, модуль лінгвістичного аналізу файлу-завдання, модуль розрахунку коефіцієнтів впливу та модуль побудови стрічкової матриці за заданими граничними умовами.

Тестування модифікованого програмного забезпечення проводилося на декількох простих прикладах, для яких відомі дані точних розв'язків [7,8].

Приклад 1. Радіаційний теплообмін між плоскими поверхнями. Необмежені пластини розділені між собою діатермічною середою [7] (рис. 2(а)): температури (t) і степінь чорноти (ε) поверхонь пластин t_1 = 127;500;1200 °С і t_2 = 50;250;500 °С, ε_1 = 0,5;0,8 і ε_2 = 0,5;0,6. Необхідно знайти щільність теплового потоку між плоскими поверхнями. При чисельному розв'язанні задачі розглядався куб, на бічних поверхнях якого задавалися адіабатні умови теплообміну при ε = 0 (табл. 1).



а) плоскі поверхні б) циліндричні поверхні

Рис. 2. Схеми радіаційного теплообміну

Таблиця 1. Співставлення даних аналітичного і чисельного розв'язків задачі радіаційного теплообміну між необмеженими пластинами розділеними діатермічною середою

Температура поверхонь, t_1/ t_2, °С	Степінь чорноти поверхонь, ε_1/ε_2	Щільність теплового потоку, q_{12}, Вт/м^2	
		Точний розв'язок	МГЕ (150 вузлів)
127/50	0,5/0,5 0,8/0,6	278,142 435,352	278,142 435,352
500/250	0,5/0,5 0,8/0,6	5334,39 8349,47	5334,39 8349,47
1200/500	0,5/0,5 0,8/0,6	82233,7 128713,6	82233,7 128713,6

Приклад 2. Радіаційний теплообмін між плоскими поверхнями при наявності екранів. Степінь чорноти екранів $\varepsilon_{екр}$ = 0,2. Решта вихідних даних задачі така ж сама, як і в прикладі 1 (табл. 2).

Таблиця 2. Співставлення даних аналітичного і чисельного розв'язків задачі радіаційного теплообміну між необмеженими пластинами розділеними діатермічною середою без і при наявності екранів

Кількість екранів	Температура поверхонь, t_1/ t_2, °C	Степінь чорноти поверхонь, $\varepsilon_1/\varepsilon_2$	Щільність теплового потоку, q_{12}, Вт/м^2	
			Точний розв'язок	МГЕ (150-450 вузлів)
0 1 2	127/50	0,8/0,6	435,352 76,436 41,896	435,352 76,435 41,895
0 1 2	500/250	0,5/0,5	5334,39 1333,60 762,055	5334,39 1333,59 762,055
0 1 2	1200/500	0,8/0,6	128713,6 22598,58 12386,67	128713,6 22598,56 12386,66

Приклад 3. Радіаційний теплообмін між циліндричними поверхнями. Діаметри циліндрів: d_1 = 0,1м, d_2 = 0,2м (рис. 2(б)). Решта вихідних даних задачі така ж сама, як і в приладі 1. Необхідно визначити щільність теплового потоку (q_1) на поверхні з діаметром d_1. При чисельному розв'язанні задачі замість циліндричних поверхонь розглядалися 24-х гранні призми і використовувався метод з екрануванням при розрахунках коефіцієнтів впливу (табл.3).

Таблиця 3. Співставлення даних аналітичного і чисельного розв'язків задачі радіаційного теплообміну між циліндричними поверхнями розділеними діатермічною середою

Температура поверхонь, t_1/ t_2, °C	Степінь чорноти поверхонь, $\varepsilon_1/\varepsilon_2$	Щільність теплового потоку, q_1, Вт/м^2	
		Точний розв'язок	МГЕ (576 вузлів)
127/50	0,5/0,5 0,8/0,6	333,770 527,005	335,151 513,848
500/250	0,5/0,5 0,8/0,6	6401,26 10107,26	6427,75 9854,92
1200/500	0,5/0,5 0,8/0,6	98680,45 155811,24	99088,79 151921,21

Приклад 4. Радіаційний теплообмін між циліндричними поверхнями при наявності екрану. Діаметр і степінь чорноти екрана: $d_{екр}$ = 0,15м, $\varepsilon_{екр}$ = 0,2. Решта вихідних даних задачі така ж сама, як і в прикладі 1 (табл. 4).

Таблиця 4. Співставлення даних аналітичного і чисельного розв'язків задачі радіаційного теплообміну між циліндричними поверхнями розділеними діатермічною середою без і при наявності екрана

Кількість екранів	Температура поверхонь, t_1/ t_2, °C	Степінь чорноти поверхонь, $\varepsilon_1/\varepsilon_2$	Щільність теплового потоку, q_{12}, Вт/м^2	
			Точний розв'язок	МГЕ (576-1152 вузлів)
0 1	127/50	0,8/0,6	527,005 110,034	513,848 107,480
0 1	500/250	0,5/0,5	6401,26 1882,73	6427,75 1875,30
0 1	1200/500	0,8/0,6	155811,24 32532,02	151921,21 31776,99

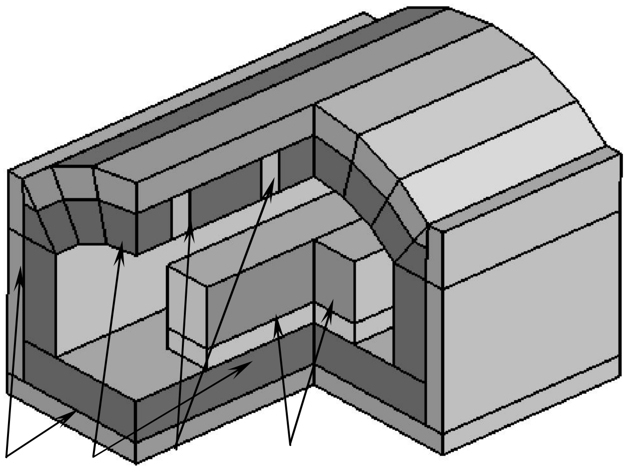
Приклад 5. Стаціонарний теплообмін через багатошарову стінку при граничних умовах конвективного типу [7,8]: кількість шарів –3; 1-й і 3-й шари теплопровідні, а 2-й – діатермічна середа, товщини шарів $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$ =0,12 м; теплопровідність шарів λ_1, λ_3; степінь чорноти поверхонь, які обмежують 2-й шар ε=0,8; умови конвективного типу α_1 = 20 Вт/(м^2·К), t_1 = 1200 °C; α_2 = 10 Вт/(м^2·К), t_2 = 27 °C (табл. 5).

Таблиця 5. Співставлення даних аналітичного і чисельного розв’язків стаціонарної задачі складного теплообміну в багатошаровій необмеженій плоскій стінці при граничних умовах конвективного типу

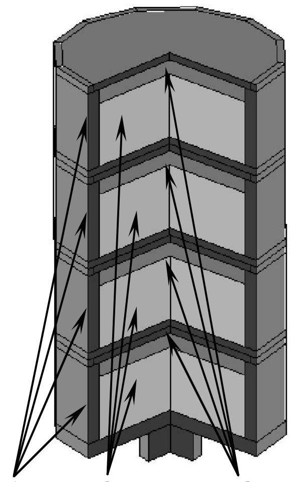
Теплопровідність λ_1 / λ_3, Вт/(м·К)	Температури, багатошарової стінки, $t_1/t_2/t_3/t_4$, °С		Щільність теплового потоку, q, Вт/м^2	
	Точний розв’язок	МГЕ (1944 вузлів)	Точний розв’язок	МГЕ (1944 вузлів)
1,5/0,2	1129,60/1016,96/1012,60/167,80	1129,54/1017,36/1013,00/167,92	1408,005	1409,246

Результати чисельних експериментів

За допомогою описаного програмного забезпечення виконані розрахунки температурних полів в умовах дії складного теплообміну в тунельній печі та ростовому вузлі кристалізатора (рис. 3). Для досягнення точності 0,001 °С необхідно 5-8 ітерацій. Результати розрахунків наведені на рис. 4. При виконанні розрахунків теплопровідність твердих матеріалів бралася із [9], степінь чорноти із [8].

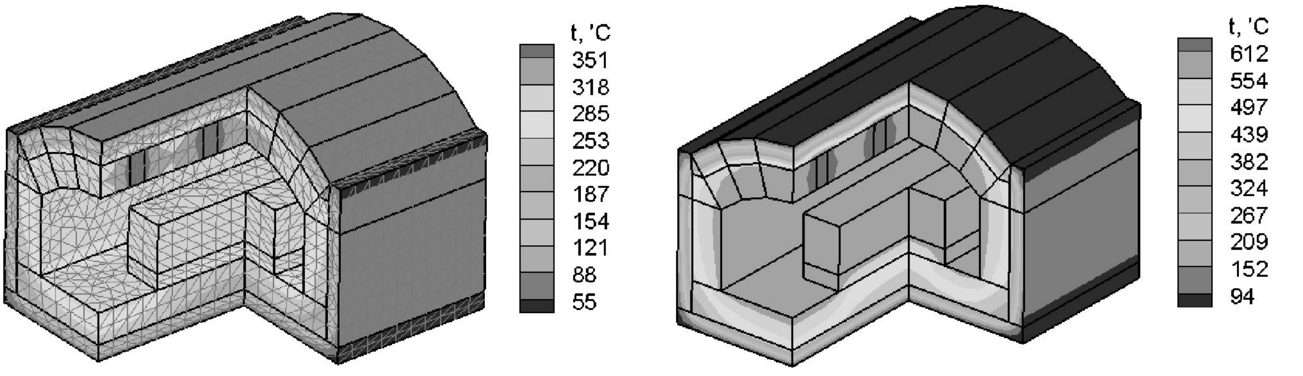


1 – теплоізолятор; 2 – вогнетрив; 3 – нагрівач; 4 – заготовка; діатермічна порожнина знаходиться між внутрішніми поверхнями печі і зовнішніми - заготовки
а) тунельна піч

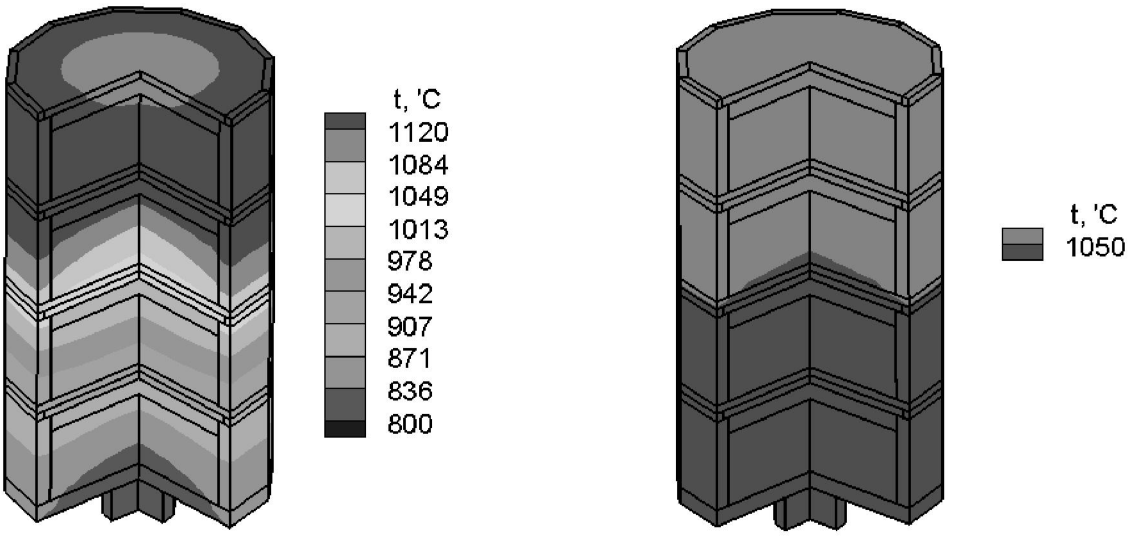


1 – тигель; 2 – кристал або розплав;
3 – діатермічна порожнина
б) ростовий вузол кристалізатора за методом Бріджмена-Стокбаргера

Рис. 3. Геометричні характеристики чисельних моделей складного теплообміну



а) температурні поля тунельної печі при різних режимах нагріву заготовок



б) в)

температурні поля ростового вузла кристалізатора (б), місце розташування та форма фронту кристалізації (в)

Рис. 4. Результати розрахунків температурних полів в умовах складного теплообміну

Висновки

На підставі розробленої на базі методу граничних елементів чисельної методики, основою якої є зведення визначення коефіцієнтів впливу до обчислення тільки одного інтегралу з врахуванням ефекту екранування променів, можна розв'язувати тривимірні стаціонарні задачі радіаційного та радіаційно-кондуктивного теплообміну в теплопровідному і діатермічному середовищах при дифузному відбитті границь.

Проблеми розрахунку складного теплообміну при спільній дії або взаємодії теплопровідності та радіації у прозорому матеріалі та поглинаючому і випромінюючому середовищі залишаються нерозв'язаними.

Дослідження, подані в цій публікації, виконані при підтримці INTAS 05-1000008-8111.

Література

1. *Р.Зигель, Дж.Хауэлл* Теплообмен излучением/Пер. с англ. -М.: Мир, 1975, 934с.
2. *Юферев В.С., Васильев М.Г., Проэкт Л.Б.* Новый метод решения задач переноса излучения в излучающих, поглощающих и рассеивающих средах// Журнал технической физики. – 1997. - Т. 67, № 9. – С.1-7.
3. *S.Kochuguev, D.Ofengeim, A.Zhmakin* Axisymmetrical radiative heat transfer simulation by Ray Tracing Method, Proceedings of the 3rd European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, *P. Neittaanmäki, T. Tiihonen and P. Tarvainen* (eds.), World Scientific, Singapore, 2000, pp. 579-586.
4. Boundary Element Methods in Heat Transfer/ Ed: *L.C. Wrobel, C.A.Brebbia* - London & New York: CMP Southampton Boston & Elsevier Applied Science, 1992. - 294 p.
5. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов/ Пер. с англ. - М: Мир, 1987, - 524с.
6. *Карвацький А.Я., Дудніков П.Й., Лелека С.В., Жученко А.І.* Застосування методу граничних елементів для розв'язання тривимірних задач теплопровідності// Наукові вісті НТУУ "КПІ". –2005.-№5.-С.5-13.
7. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача /Учебн. для вузов. - М: Энергоиздат, 1981. – 416с.
8. *Краснощеков Е.А., Сукомел А.С.* Задачник по теплопередаче /Учебн. для вузов. - М:Энергия, 1969. – 264с.
9. Физические величины. Справочник/ Под ред. *И.С. Григорьва.*- М.: Энергоатомиздат, 1991. -1232с.

Резюме:

А.Я.Карвацький, П.Й.Дудніков, С.В.Лелека

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ РАДІАЦІЙНОГО ТА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

На базі методу граничних елементів запропонована методика чисельного розв'язання тривимірних стаціонарних задач радіаційного і кондуктивного теплообміну при наявності внутрішніх джерел теплоти. Розроблено універсальне програмне забезпечення для розв'язання тривимірних задач складного теплообміну в неоднорідних тілах при різних комбінаціях граничних умов. Проведено тестування програмного забезпечення і виконані розрахунки температурних полів для умов складного теплообміну в тунельній печі і ростовому вузлі кристалізатора.

А.Я.Карвацкий, П.И.Дудников, С.В.Лелека

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАДИАЦИОННОГО И СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

На основе метода граничных элементов предложена методика численного решения трехмерных стационарных задач радиационного і кондуктивного теплообмена при наличии внутренних источников теплоты. Разработано универсальное программное обеспечение для решения трехмерных задач сложного теплообмена в неоднородных телах при различных комбинациях граничных условий. Проведено тестирование программного обеспечения и выполнены расчеты температурных полей для условий сложного теплообмена в туннельной печи и ростовом узле кристаллизатора.

A.Ya.Karvatsky, P.I.Dudnikov, S.V.Leleka

BOUNDARY ELEMENT METHOD APPLICATION TO SIMULATE RADIATIVE AND COMPLEX HEAT EXCHANGE PROBLEMS

Three-dimensional calculation method of stationary thermal radiative and conductive problems in the presence of internal heat source is proposed on basis of boundary element method. To simulate three-dimensional complex heat exchange problems in heterogeneous complex form solids at different combinations of boundary conditions, universal software has been developed. Software has been tested and temperature field calculations for conditions of complex heat exchange in the tunnel furnace and crystallizer growth unit.

Відомості про авторів:

1. Карвацький Антон Янович, к.т.н., с.н.с., п.н.с., науково-дослідний центр “Ресурсозберігаючі технології” Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37, корп. 19, к. 313, тел. 241-86-09. E-mail: anton@rst.kiev.ua
2. Дудніков Петро Йосипович, к.ф.-м.н., с.н.с., Інститут прикладного системного аналізу НАН та Міносвіти України, відділ нелінійного прикладного аналізу, 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37, корп. 35, к. 110, тел. 241-87-05.
3. Лелека Сергій Володимирович, н.с., науково-дослідний центр “Ресурсозберігаючі технології” Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37, корп. 19, к. 313, тел. 241-86-09. E-mail: sleleka@rst.kiev.ua