

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Вступ

Наразі для розв'язання тривимірних задач теорії поля, зокрема теплопровідності, та інших інженерних задач багатьма провідними фірмами світу використовуються багатоцільові стандартні програмні продукти, наприклад такі, як ANSYS, Cosmos/M, ABAQUS [1,2] і т.д. Математичною базою цих розробок є різні модифікації методу скінчених елементів (МСЕ). Однією з основних проблем такого підходу є дискретизація тривимірних областей зі складною конфігурацією.

Існує багато задач теплопровідності, які можуть бути ефективно розв'язані за допомогою іншого чисельного методу, а саме методу граничних елементів (МГЕ). Відомо, що МГЕ [3-6] може дати результат в простому і красивому формулюванні для багатьох практичних випадків інженерних задач: лінійних і нелінійних задач теплопровідності, деяких задач радіаційного і конвективного теплообміну, задач механіки твердого тіла та багатьох інших.

Використання МГЕ для розв'язання більшості інженерних задач дозволяє знизити розмірність задачі на одиницю та уникнути проблеми триангуляції внутрішньої частини об'єму, яка обов'язкова при використанні МСЕ.

В порівнянні з МСЕ, МГЕ має певні переваги в тому, що зменшується кількість вузлів, тобто розмірність матриці системи лінійних рівнянь і відповідно вимоги до ресурсів комп'ютера. Використання МГЕ при розробці універсального програмного продукту також має певну наукову новизну.

Однак при реалізації МГЕ виникають певні проблеми:

- перетворення інтегралів по об'єму в граничні інтегральні вирази;
- багатозначність першої похідної на суміжних гранях, які належать різним площинам;
- сингулярність діагональних коефіцієнтів впливу для потоку;
- задача визначення компонент щільності потоку на границях.

Саме розв'язанню цих проблем МГЕ присвячена дана стаття.

Постановка задачі

Нелінійне стаціонарне рівняння теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти для неоднорідного тіла (складної конструкції) має вигляд

$$\operatorname{div}[\lambda_i(t)\nabla t(X)] + q_{vi}(X) = 0, \quad (1)$$

де $\lambda_i(t)$ - температурна залежність теплопровідності i -го елемента конструкції, Вт/(м·К); t - температура, °С; $X(x, y, z) \in \Omega$ - декартові координати, м; q_{vi} - щільність внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; ∇ - оператор Гамільтона.

Граничні умови для рівняння (1) мають вигляд:

– на Γ_1 – умови Дирихле

$$t|_{\Gamma_1} = t(x, y, z), \quad (2)$$

– на Γ_2 – умови Неймана

$$\vec{n} \cdot [-\lambda_i(t)\nabla t] = q(x, y, z), \quad (3)$$

де \vec{n} - зовнішня нормаль до границі; q - щільність теплового потоку, Вт/м²;

– на Γ_3 – умови Фур'є або конвективного типу

$$\vec{n} \cdot [-\lambda_i(t)\nabla t] = \alpha_{\text{эф}}(t)(t - t_d), \quad (4)$$

де $\alpha_{\text{эф}}$ - ефективний коефіцієнт тепловіддачі, який враховує конвекцію і випромінювання, Вт/(м²·К); t_d – температура довкілля, °С;

– на Γ_4 – умови контакту різних елементів конструкції, або умови спряження, в яких також може враховуватись контактний термічний опір

$$\begin{cases} \{t\} = r_\lambda^+ \vec{n} \cdot \vec{q}^+ \\ \{\vec{n} \cdot \vec{q}\} = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

де $\{t\} = t^+ - t^-$, t^\pm - значення температури ліворуч і праворуч від границі; $\{\vec{n} \cdot \vec{q}\} = \vec{n}^+ \cdot \vec{q}^+ - \vec{n}^- \cdot \vec{q}^-$, \vec{q} - вектор щільності теплового потоку, Вт/м²; r_λ - контактний термічний опір, (м²·К)/Вт. При $r_\lambda = 0$ - виконуються умови абсолютного контакту.

Рівняння (1) можна розглядати як узагальнену постановку стаціонарної задачі типу Стефана, в якій шляхом введення стрибка теплопровідності враховується наперед невідома границя розділу фаз (розплав - тверде тіло). Таким чином в (1) враховується стрибок теплопровідності на фронті:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_T, & t \leq t_\phi, \\ \lambda_P, & t > t_\phi, \end{cases} \quad (6)$$

де t_ϕ - температура фазового переходу, °C; λ_T, λ_P - теплопровідності твердої та рідкої фаз, відповідно, Вт/(м·К).

Методика чисельного розв'язання

Спочатку розглянемо методику чисельного розв'язання лінійного рівняння теплопровідності, а потім перейдемо до розв'язку нелінійної задачі.

Таким чином розглянемо рівняння Пуассона

$$\Delta t = b, \quad (7)$$

де $b = -\frac{q_v}{\lambda}$; Δ - оператор Лапласа.

В даній статті для розв'язку сформульованої задачі запропоновано використовувати прямий метод граничних елементів (ПМГЕ) [2].

При реалізації ПМГЕ необхідно виконати такі основні етапи:

- триангуляція границь Γ_i ($i = 1, \dots, 4$);
- обчислення коефіцієнтів впливу;
- заміна інтегралів по об'єму, пов'язаних з внутрішнім джерелом теплоти, на граничні;
- формування матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) при заданих граничних умовах;
- усунення сингулярності системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) та її розв'язок;
- визначення компонент щільності потоку на границях Γ_i ($i = 1, \dots, 4$).

Для описання 3D тіл в даній методиці використовуються плоскі багатогранники, далі грані. Для дискретизації граней застосовується триангуляція: за методом Делоне. Розроблена оригінальна методика триангуляції Γ_i , яка базується на відображенні довільної плоскої грані з 3D в 2D, що дозволяє значно полегшити процедуру розбивки довільної кусково-плоскої границі. Одиницею триангуляції є плоска 2D грань, причому вузли по контурах сусідніх граней (ребрах) для Γ_i ($i = 1, \dots, 3$) є подвійними, тобто незв'язаними між собою. Виконання відповідності між вузлами накладається тільки на вузли по всій площині грані для Γ_4 . Після виконання триангуляції грані виконується зворотній перехід з 2D в 3D.

У відповідності з запропонованою дискретизацією за граничні елементи були вибрані лінійні трикутні елементи. При використанні лінійних поверхневих елементів нумерація вершин трикутників, які оточують вузол j , виконується таким чином, щоб вершина, яка співпадає з вузлом j , мала номер 3 в кожному із вказаних трикутників (рис. 1). В кожному трикутнику (з 3-ма вузлами) вибирається лінійна апроксимація функцій, наприклад, температура і щільність теплового потоку задаються формулами

$$\begin{cases} t(\eta_1, \eta_2) = t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + t_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \\ q(\eta_1, \eta_2) = q_1\eta_1 + q_2\eta_2 + q_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \end{cases} \quad (8)$$

Координати визначаються за формулами

$$\begin{cases} x(\eta_1, \eta_2) = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \\ y(\eta_1, \eta_2) = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + y_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \\ z(\eta_1, \eta_2) = z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + z_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \end{cases} \quad (9)$$

де індекси 1,2,3 – відносяться до номерів вершин трикутників; (η_1, η_2) – косокутна система координат.

Дискретна форма граничного інтегрального рівняння для (7) при 1,2 крайових задачах має вигляд

$$c_i t_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} t q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q t^* d\Gamma + \int_{\Omega} b t^* d\Omega, \quad (10)$$

де c_i - коефіцієнт, який залежить від геометрії границі в i -у вузлі; N – кількість трикутників, на які розбита поверхня розрахункової області Ω ; t^*, q^* - фундаментальний розв'язок і його нормальна похідна.

Коефіцієнти впливу не залежать від функцій (t, q) і тому можуть бути обчислені заздалегідь. Нумерація вершин трикутників задається відповідно до рис. 1.

Коефіцієнти впливу обчислюються за формулами:

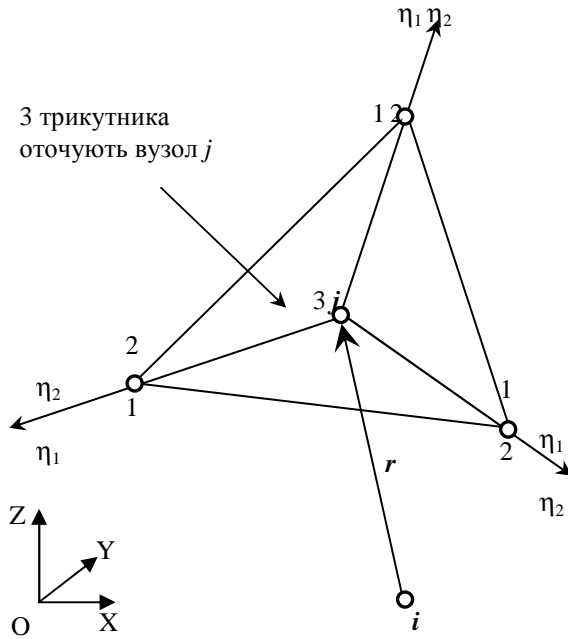
$$H_{ij} = \sum_{k=1}^K \left\{ |J| \int_0^1 \int_0^{1-\eta_1} (1-\eta_1-\eta_2) q^*(\eta_1, \eta_2) d\eta_2 \right\}_k, \quad (11)$$

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^K \left\{ |J| \int_0^1 \int_0^{1-\eta_1} (1-\eta_1-\eta_2) t^*(\eta_1, \eta_2) d\eta_2 \right\}_k, \quad i, j = \overline{1, M}$$

де K – кількість трикутників, які оточують вузол j ; k – індекс трикутника; M – кількість граничних вузлів; $|J| = 2S_{\Delta}$ – якобіан; S_{Δ} – площа відповідного трикутника.

Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа для ізотропного середовища

$$t^*(\xi, X) = \frac{1}{4\pi\lambda} \frac{1}{r(\xi, X)} = \frac{1}{4\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{(x_{\xi} - x)^2 + (y_{\xi} - y)^2 + (z_{\xi} - z)^2}}.$$



i – індекс вузла джерела; j – індекс поточного вузла поверхні; $i, j = \overline{1, M}$; M – кількість поверхневих вузлів; r – відстань між джерелом і поверхнею тіла; (η_1, η_2) – косокутна система координат; 1, 2, 3 – номери вершин трьох трикутників, які оточують вузол з індексом j .

Рис. 1. Схема нумерації вершин трикутників

При $i \neq j$ несингулярні інтеграли (11) визначаються чисельно за допомогою квадратурної формули Хамера [3].

$$H_{ij} \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^K \left\{ |J|_k \sum_{\ell=1}^n \left[(1-\eta_{1\ell} - \eta_{2\ell}) \frac{(x_i - x_{jkl}) n_{xk} + (y_i - y_{jkl}) n_{yk} + (z_i - z_{jkl}) n_{zk}}{\sqrt{\{(x_i - x_{jkl})^2 + (y_i - y_{jkl})^2 + (z_i - z_{jkl})^2\}^{\frac{3}{2}}}} \right] w_{\ell} \right\}, \quad (12)$$

$$G_{ij} \approx \frac{1}{4\pi\lambda} \sum_{k=1}^K \left\{ |J|_k \sum_{\ell=1}^n \left[\frac{(1-\eta_{1\ell} - \eta_{2\ell})}{\sqrt{(x_i - x_{jkl})^2 + (y_i - y_{jkl})^2 + (z_i - z_{jkl})^2}} \right] w_{\ell} \right\}, \quad i, j = \overline{1, M} \quad (13)$$

де $\eta_{1\ell}, \eta_{2\ell}, w_{\ell}$ – вузли і вага квадратурної формули Хамера; n – число вузлів квадратурної формули; n_x, n_y, n_z – направляючі косинуси зовнішньої нормалі до площини;

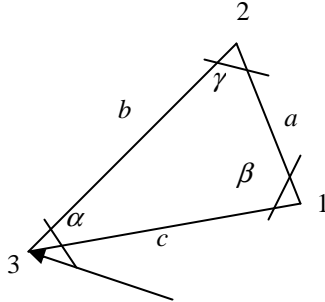
$$\begin{cases} x_{jkl} = [x_1\eta_{1\ell} + x_2\eta_{2\ell} + x_3(1-\eta_{1\ell} - \eta_{2\ell})]_{jk}, \\ y_{jkl} = [y_1\eta_{1\ell} + y_2\eta_{2\ell} + y_3(1-\eta_{1\ell} - \eta_{2\ell})]_{jk}, \\ z_{jkl} = [z_1\eta_{1\ell} + z_2\eta_{2\ell} + z_3(1-\eta_{1\ell} - \eta_{2\ell})]_{jk}. \end{cases} \quad \text{- координати вузлів.}$$

При $i=j$

$$H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M H_{ij}, \quad i = \overline{1, M} \quad (14)$$

Обчислення сингулярних коефіцієнтів впливу для потоку виконано за допомогою аналітичного обчислення сингулярних інтегралів. Наведемо відповідні формули для трьох випадків, в яких поточний вузол завжди знаходиться у вершині трикутника з номером $j=3$.

Випадок 1. Джерело співпадає з поточним вузлом $i=j$. Поточний вузол і джерело знаходяться в одному і тому ж трикутнику у вершині з номером 3 (рис. 2).



Поточний вузол і джерело співпадають
Рис. 2. Схема трикутника

$$(g_{ii})_k = \frac{S}{4\pi\lambda a} (Arsh(ctg\beta) + Arsh(ctg\gamma)),$$

де S – площа трикутника, λ – теплопровідність, a, b, c – довжина сторін трикутника, α, β, γ – кути трикутника, $Arsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; k – номер трикутника, тобто $G_{ij} = \sum_{k=1}^K (g_{ij})_k$.

Випадок 2. Джерело знаходиться в тому ж трикутнику, що і поточний вузол, але у вершині з номером $i=1$.

$$(g_{ij})_k = \frac{S(b - c \cos\alpha)}{4\pi\lambda b^2} (Arsh(ctg\alpha) + Arsh(ctg\gamma)) + \frac{(c - a)S}{4\pi\lambda b^2}.$$

Випадок 3. Джерело знаходиться в тому ж трикутнику, що і поточний вузол, але у вершині з номером 2.

$$(g_{ij})_k = \frac{S(c - b \cos\alpha)}{4\pi\lambda c^2} (Arsh(ctg\alpha) + Arsh(ctg\beta)) + \frac{(b - a)S}{4\pi\lambda c^2}.$$

В класичному формулюванні МГЕ для рівняння (7) має місце інтеграл по області

$$D = \int_{\Omega} \lambda \frac{q_v}{\lambda} t^* d\Omega. \quad (15)$$

Для перетворення (7) в граничний інтеграл використаємо частинний розв'язок рівняння Пуасона [3]

$$\nabla^2 P = \frac{q_v}{\lambda} :$$

$$P = \frac{(x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 + (z - z_D)^2}{6} \frac{q_v}{\lambda},$$

де D – індекс джерела.

З урахуванням останнього вираз (15) можна перетворити в граничний за допомогою II теорему Гріна

$$D = c_M P_M + \int_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial n} t^* d\Gamma - \int_{\Gamma} P q^* d\Gamma. \quad (16)$$

При цьому коефіцієнти впливу для (16) ті самі, що і для (10)-(12)-(14).

Після виконання розрахунків всіх коефіцієнтів для кожного із елементів складеної області можна записати СЛАР у відповідності з граничними умовами. У векторній формі запису СЛАР буде мати вигляд

$$\begin{cases} \mathbf{Ht} - \mathbf{Gq} = \mathbf{B} \\ (\mathbf{H} + \mathbf{G}\alpha_{ef}) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{G}\alpha_{ef} t_{\partial} + \mathbf{B} \end{cases} \quad (17)$$

де \mathbf{B} – вектор, пов'язаний з внутрішнім джерелом теплоти.

У загальному випадку для спряженої області, яка складається із множини об'ємів з різними однорідними властивостями, матриця (17) буде не повністю заповненою, тобто розрідженою. Тому при розв'язанні СЛАР виду (17) можна використовувати блочний, або стрічковий спосіб зберігання матриці [7-9].

Для виключення сингулярності матриці системи (17) використовуються технологія стиску граней по контуру на 0,1-0,2% від максимального лінійного розміру. Ця процедура відбувається на етапі триангуляції, та використовується тільки для обчислення коефіцієнтів впливу G . Матриця СЛАР записується в стрічковому

вигляді. Розв'язок СЛАР здійснюється за допомогою методу Гауса з врахуванням стрічкової структури матриці. Після розв'язку СЛАР визначаються невідомі потенціали і щільності нормальних потоків на границях.

Для розрахунку компонент вектора щільності потоку на границях Γ_i запропонована оригінальна методика визначення компонент градієнта потенціалу.

Якщо система координат (η_1, η_2) в трикутнику задається формулами (9), а температура – формулою (8), то щільність теплового потоку обчислюється за законом Фур'є [10]

$$q(x, y, z) = -\lambda_x \frac{\partial t}{\partial x} n_x - \lambda_y \frac{\partial t}{\partial x} n_y - \lambda_z \frac{\partial t}{\partial x} n_z, \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} &= -\frac{\sum_{i=1}^3 q_i \eta_i n_x + \lambda_y n_y \frac{\begin{vmatrix} t_1 - t_3 & z_1 - z_3 \\ t_2 - t_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix}}{2S} - \lambda_z n_z \frac{\begin{vmatrix} t_1 - t_3 & y_1 - y_3 \\ t_2 - t_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}}{2S}}{\lambda_x n_x^2 + \lambda_y n_y^2 + \lambda_z n_z^2}, \\ \frac{\partial t}{\partial y} &= -\frac{-\lambda_x n_x \frac{\begin{vmatrix} t_1 - t_3 & z_1 - z_3 \\ t_2 - t_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix}}{2S} + \sum_{i=1}^3 q_i \eta_i n_y - \lambda_z n_z \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & t_1 - t_3 \\ x_2 - x_3 & t_2 - t_3 \end{vmatrix}}{2S}}{\lambda_x n_x^2 + \lambda_y n_y^2 + \lambda_z n_z^2}, \\ \frac{\partial t}{\partial z} &= -\frac{-\lambda_x n_x \frac{\begin{vmatrix} y_1 - y_3 & t_1 - t_3 \\ y_2 - y_3 & t_2 - t_3 \end{vmatrix}}{2S} + \lambda_y n_y \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & t_1 - t_3 \\ x_2 - x_3 & t_2 - t_3 \end{vmatrix}}{2S} + \sum_{i=1}^3 q_i \eta_i n_z}{\lambda_x n_x^2 + \lambda_y n_y^2 + \lambda_z n_z^2}. \end{aligned}$$

При розв'язанні нелінійної задачі (1)-(6) в основу чисельної методики покладено пряме та зворотне перетворення Кірхгофа [3] разом з ітераційним розв'язком системи рівнянь. Пряма підстановка Кірхгофа призводить до появи потенціалу

$$\varphi^k = \int_0^{t^k} \lambda(t) dt,$$

де k - номер ітерації.

При використанні лінійного закону теплопровідності від температури

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t \quad (19)$$

для об'ємів без фазового переходу маємо, що $\varphi^k = \lambda_0 t^k + \lambda_1 \frac{(t^k)^2}{2}$.

Введемо поняття середньоінтегральної теплопровідності

$$\bar{\lambda}(t^k) = \frac{1}{t^k} \int_0^{t^k} \lambda(t) dt \quad \text{або} \quad \bar{\lambda}(t^k) = \lambda_0 + \lambda_1 \frac{t^k}{2}$$

Тоді потенціал можна представити

$$\varphi^k = \bar{\lambda}(t^k) \cdot t^k.$$

Для об'ємів з наявністю фазового переходу залежність теплопровідності від температури моделюється наступним чином

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_\tau, & t < t_\phi - \Delta t / 2 \\ \frac{\lambda_\tau - \lambda_p}{\Delta t} (t - t_p) + \frac{\lambda_\tau + \lambda_p}{2}, & t \in \left[t_\phi - \frac{\Delta t}{2}; t_\phi + \frac{\Delta t}{2} \right], \\ \lambda_p, & t > t_\phi + \Delta t / 2 \end{cases}, \quad (20)$$

де Δt - температурний інтервал згладжування.

Тоді потенціал буде визначатись за формулою

$$\varphi^k = \begin{cases} \lambda_{\tau} t^k, & t^k < t_{\phi} - \frac{\Delta t}{2} \\ \lambda_{\tau} t^k + \frac{\lambda_p - \lambda_{\tau}}{2\Delta t} (t^k - t_{\phi})^2 + \frac{\lambda_p - \lambda_{\tau}}{2} (t^k - t_{\phi}) + \frac{\lambda_p - \lambda_{\tau}}{8} \Delta t, & t^k \in \left[t_{\phi} - \frac{\Delta t}{2}; t_{\phi} + \frac{\Delta t}{2} \right] \\ \lambda_{\tau} t_{\phi} + \lambda_p (t^k - t_{\phi}), & t^k > t_{\phi} + \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

Коефіцієнти впливу обчислюються за формулами (12),(13) при $\lambda = 1$.

Для запису системи типу (17) використовується часткова лінеаризація за методом Ньютона [11].

$$\begin{cases} \mathbf{H}\varphi^k = \mathbf{G}\mathbf{q}^k + \mathbf{B} \\ \left\{ \mathbf{H} \left[\bar{\lambda}(t^k) + \frac{\partial \bar{\lambda}(t^k)}{\partial t^k} t^k \right] + \mathbf{G}\alpha \right\} \cdot \delta t^{k+1} = -\mathbf{H}\varphi^k + \mathbf{G}\alpha(t_{\phi} - t^k) + \mathbf{B} \\ \mathbf{H} \left[\bar{\lambda}(t^k) + \frac{\partial \bar{\lambda}(t^k)}{\partial t^k} t^k \right] \cdot \delta t^{k+1} = -\mathbf{H}\varphi^k + \mathbf{G}\mathbf{q}^k + \mathbf{B} \end{cases} \quad (21)$$

Температура визначається в ітераційному циклі із розв'язку (21) за формулою $t^{k+1} = t^k + \delta t^{k+1}$.

Матриця системи рівнянь (21) має погану обумовленість, яка спричиняється 2-м та 3-м рівняннями системи. Для уникнення цього перед розв'язком (21) виконується нормування відповідних строк матриці і вектора вільних членів шляхом ділення на $\bar{\lambda}(t^k)$.

Програмне забезпечення. Результати тестування

На базі викладеної методики чисельного розв'язання поставленої задачі розроблено універсальне програмне забезпечення для розв'язання тривимірних нелінійних задач стаціонарної теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти в сполучених тілах складної геометрії при різних комбінаціях граничних умов.

В основу даного програмного продукту покладені принципи структурного програмування, які реалізовані в програмному забезпеченні за допомогою мови програмування C++.

Програмне забезпечення побудовано на модульному принципі і містить у собі такі складові:

- модуль лінгвістичного аналізу файлу-завдання;
- модуль дискретизації поверхонь (граней) об'ємів;
- модуль розрахунку коефіцієнтів впливу;
- модуль побудови стрічкової матриці за заданими граничними умовами;
- модуль розрахунку температурних полів та складових щільності теплового потоку.

Для візуалізації перегляду результатів розрахунків використовується стандартне програмне забезпечення Tecplot.

Файли завдань містять спеціально розроблені ключові слова, що визначають:

- об'єми, які складаються з граней, із зазначенням їхніх імен та фізичних властивостей;
- геометричні характеристики;
- граничні умови;
- умови проведення розрахунків та змінні.

Прототипом для створення даної розробки є програмний продукт "Електроліз" представлений в [12].

Тестування програмного забезпечення проводилося на декількох простих прикладах, для яких відомі дані точних рішень.

Приклад 1. Стаціонарна теплопровідність необмеженої пластини при наявності внутрішнього джерела теплоти [10]: товщина $2\delta = 0,5$ м; теплопровідність $\lambda = 1; 14; 100$ Вт/(м·К), густина внутрішнього джерела теплоти $q_v = 15000$ Вт/м³, умови конвективного типу $\alpha = 20$ Вт/(м²·К), $t = 100$ °С (табл. 1).

Таблиця 1

Співставлення даних аналітичного і чисельного розв'язків стаціонарної задачі теплопровідності необмеженої пластини з внутрішніми джерелами теплоти при граничних умовах конвективного типу

Теплопровідність λ , Вт/(м·К)	Мінімальна температура, t_{\min} , °С		Максимальна температура, t_{\max} , °С		Щільність теплового потоку, q , Вт/м ²	
	Точний розв'язок	ПМГЕ (294 вузла)	Точний розв'язок	ПМГЕ (294 вузла)	Точний розв'язок	ПМГЕ (294 вузла)
1	287,5	286,471	756,250	758,240	3750,00	3754,93
14	287,5	287,615	320,982	321,350	3750,00	3754,91
100	287,5	287,727	292,188	292,450	3750,00	3754,91

Приклад 2. Стационарна теплопровідність багат шарової необмеженої плоскої стінки при граничних умовах конвективного типу [10]: кількість шарів – 2; товщини $\delta_1 = \delta_2 = 0,065$ м; теплопровідність шарів λ_1, λ_2 ; умови конвективного типу $\alpha_1 = 20$ Вт/(м²·К), $t_{1д} = 100$ °С; $\alpha_2 = 20$ Вт/(м²·К), $t_{2д} = 1000$ °С (табл. 2).

Таблиця 2

Співставлення даних аналітичного і чисельного розв'язків стаціонарної задачі теплопровідності багат шарової необмеженої плоскої стінки при граничних умовах конвективного типу

Теплопровідність λ_1 / λ_2 , Вт/(м·К)	Температури двошарової стінки, $t_1/t_2/t_3$, °С		Щільність теплового потоку, q , Вт/м ²	
	Точний розв'язок	ПМГЕ (259 вузлів)	Точний розв'язок	ПМГЕ (259 вузлів)
14,0/14,0	511,765/550,0/588,235	511,873/550,0/588,128	8235,29	8237,48
1,4/14,0	179,096/913,559/920,904	179,242/913,416/920,758	1581,92	1584,84
0,014/1400,0	109,488/990,503/990,512	109,509/990,483/990,491	189,757	190,174

Приклад 3. Стационарна задача Стефана: необмежений шар товщиною $\delta = 0,5$ м; температура фазового переходу $t_\phi = 500$ °С; теплопровідності твердого тіла і розплаву λ_t і λ_p , відповідно; температури на границях шару при $x_1 = 0$ м, $t_1 = 0$ °С і при $x_2 = \delta$, $t_2 = 1000$ °С (табл. 3).

Таблиця 3

Співставлення даних точного і чисельного розв'язків стаціонарної задачі Стефана для необмеженого шару при граничних умовах Дирихле

Теплопровідність λ_t / λ_p , Вт/(м·К)	Положення границі розподілу фаз/похибка, м/%		
	Точний розв'язок	ПМГЕ, 40 вузлів по товщині шару	ПМГЕ, 80 вузлів по товщині шару
20/2	0,45(45)/0	0,4505/0,88	0,4508/0,81
200/2	0,4950/0	0,4880/1,41	0,4938/0,24

Приклад 4. Стационарна нелінійна теплопровідність [10]: необмежений шар товщиною $\delta = 0,5$ м; теплопровідність залежить від температури $\lambda(t) = \lambda_0(1 + \beta t)$, $\lambda_0 = 7$ Вт/(м·К), $\beta = 0,0005$ К⁻¹; граничні умови при $x_1 = 0$ м, $t_1 = 0$ °С, а при $x_2 = \delta$, $q_2 = -10000$ Вт/м² (табл. 4).

Таблиця 4

Співставлення даних аналітичного і чисельного розв'язків стаціонарної нелінійної задачі теплопровідності необмеженої пластини при граничних умовах Дирихле і Неймана

x , м	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
t , °С (точний розв'язок)	951,997	903,200	853,569	803,059	751,623	699,206	645,751	591,194	535,463	478,479
t , °С ПМГЕ, 40 вузлів)*	952,032	903,243	853,617	803,112	751,682	699,272	645,824	591,273	535,545	478,607
t , °С ПМГЕ, 80 вузлів)*	952,009	903,216	853,586	803,077	751,642	699,228	645,775	591,219	535,486	478,520

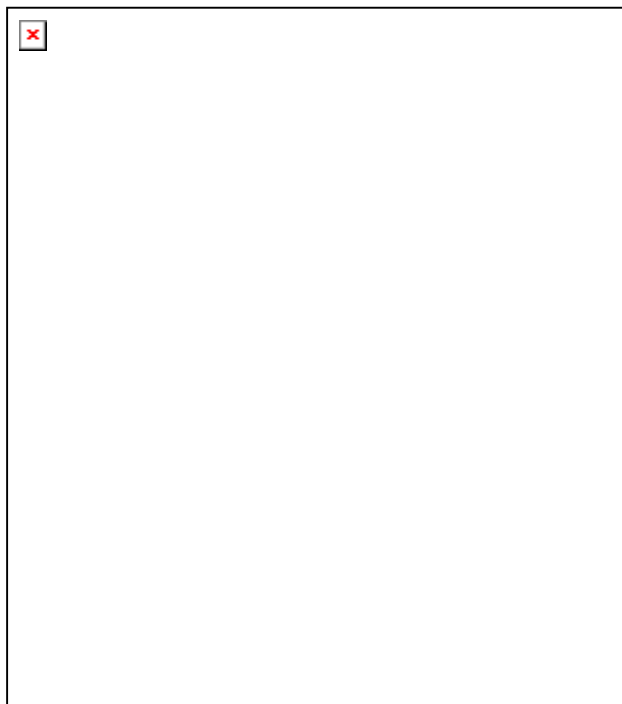
)* кількість вузлів по товщині шару.

Результати чисельних експериментів

Для демонстрації можливостей розробленого програмного забезпечення виконані розрахунки температурних полів алюмінієвого електролізу з обпаленими анодами (рис. 3) на силу струму 130кА в режимі експлуатації.

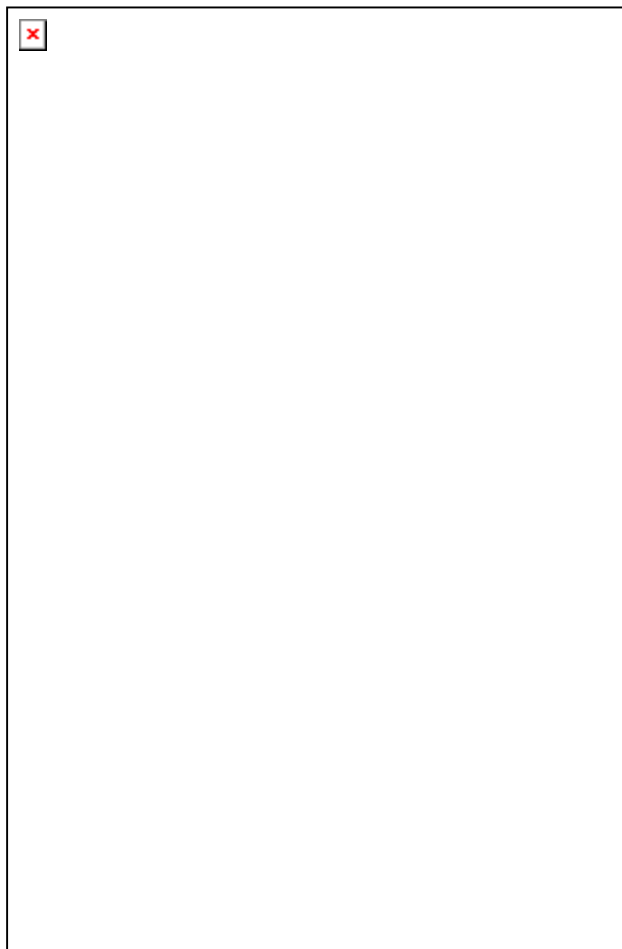
Для досягнення точності 0,001 °С необхідно 4-8 ітерацій в залежності від наявності фазового переходу, тобто стрибка теплопровідності.

Результати розрахунків наведені на рис. 4. При виконанні розрахунків теплопровідність областей електроліт-гарнісаж і метал-настиль бралася по (20), а в інших твердих матеріалах у відповідності з (19).



1- теплоізоляція днища і борту; 2,3 – вогнетривкий шар цоколя; 4-блюмс; 4-подовий блок; 6- розплав алюмінію; 7- розплав електроліту; 8-корка; 9-глінозем; 10-обпалений анод; 11-анодна траверса з ніпелями; 12-анодна штанга; 13-бровка; 14-периферійний шов; 15-бортовий блок; 16-настиль и гарнісаж.

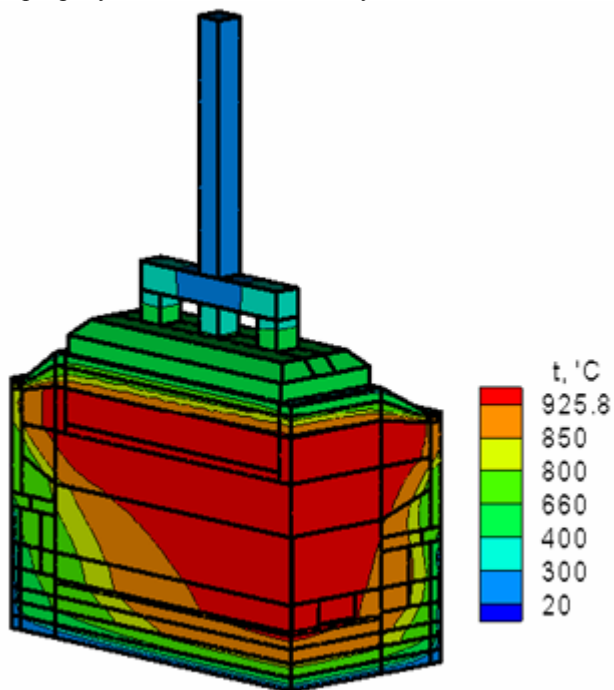
Рис. 3. Схема електролизеру с обпаленими анодами



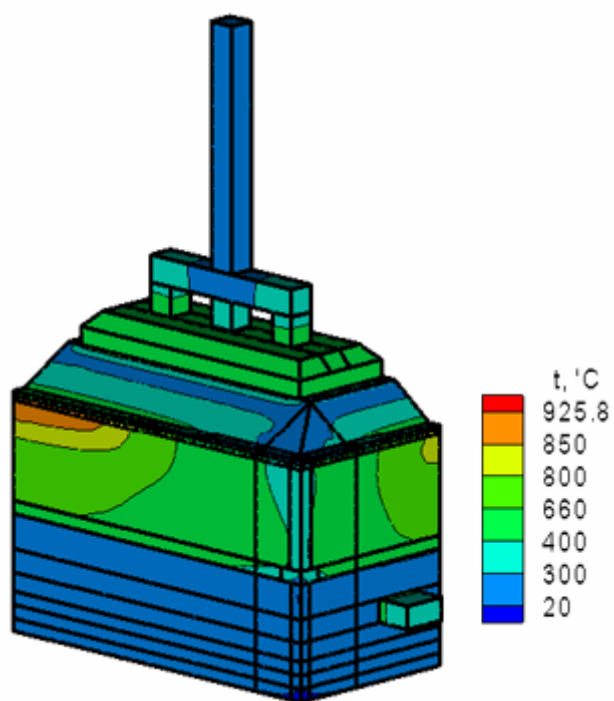
а) розрахункова сітка (14487 – вузлів)



б) Т-поле катодного пристрою



б) Т-поле електролізера (вид зі сторони осей симетрії)



г) Т-поле електролізера (вид зовні)

Рис. 4. Результати розрахунків електролізера (торцевої частини) з обпаленими анодами на силу струму 130кА в режимі експлуатації

Висновки

1. На базі класичного методу граничних елементів розроблена методика чисельного розв'язання 3-вимірних стаціонарних лінійних та нелінійних задач теплопровідності. Основою методики є зведення задачі до повністю граничної та аналітичне обчислення сингулярних інтегралів.
2. Показано, що на основі представленої методики можна розв'язувати тривимірні лінійні та нелінійні задачі теплопровідності в неоднорідних тілах навіть при великій різниці (в 3÷4 порядки) між значеннями теплопровідності різних частин конструкції.
3. До нерозв'язаних проблем можна віднести такі: розрахунок коефіцієнтів впливу для тонких областей; розробка ефективних алгоритмів для оптимізації ширини стрічки матриці.

Література

1. *А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферова.* ANSYS в руках інженера. - М.: УРСС, 2003. - 270с.
2. *Басов К.А.* ANSYS в примерах и задачах /Под общ.ред. Д.Г.Красковского. - М.: КомпьютерПресс, 2002. - 224с.
3. *Бреббия К., Теллес Ж., Вробел Л.* Методы граничных элементов/ Пер. с англ. - М: Мир, 1987, - 524с.
4. *Boundary Element Methods in Heat Transfer/ Ed: L.C. Wrobel, C.A. Brebbia* - London & New York: CMP Southampton Boston & Elsevier Applied Science, 1992. - 294 p.
5. *Карвацький А.Я.* Використання методу граничних елементів для розв'язання осесиметричних стаціонарних задач теплопровідності // Наукові вісті НТУУ "КПІ". - 1999.-№1.-С.83-87.
6. *Карвацький А.Я., Шилович І.Л., Лелека С.В.* Застосування методу граничних елементів для розв'язання задач теорії статичної термомружності// Наукові вісті НТУУ "КПІ". - 2001.-№3.-С.64-71.
7. *Тьюарсон Р.* Разреженные матрицы / Пер. с англ. - М: Мир, 1977, - 190с.
8. *А.Джордж, Дж.Лю* Численное решение больших разреженных систем уравнений/ Пер. с англ. Икрамова Х.Д. М.; Мир. - 1984. 334с.
9. *Дж. Райс* Матричные вычисления и математическое обеспечение/ Пер. с англ. Арушаняна О.Б. М.; Мир. - 1984. 264с.
10. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача /Учебн. для вузов. - М: Энергоиздат, 1981. - 416 с.
11. *Калиткин Н.Н.* Численные методы: Учеб.пособие. - М.: Наука. Гл.ред. физ.мат. лит., 1978.-512с.
12. *Панов Е.Н., Васильченко Г.Н., Даниленко С.В., Карвацький А.Я., Шилович І.Л., Боженко М.Ф.* Тепловые процессы в электролизерах и миксерах алюминиевого производства/ Под общ. ред. Б.С. Громова.- М.: Издательский дом «Руда и металлы», 1998. - 256 с.