

Використання методу граничних елементів для розв'язання вісесиметричних стаціонарних задач теплопровідності

Резюме

Розглянуті методики числового розв'язання прямим методом граничних елементів ізотропних лінійних та нелінійних і ортотропних лінійних стаціонарних вісесиметричних задач теплопровідності при різних граничних умовах. Розроблені відповідні програми розрахунку температурних полів, проведено їх тестування та виконані модельні розрахунки.

На практиці часто виникає потреба розв'язання вісесиметричних стаціонарних задач теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти: ізотропних лінійних та нелінійних, ортотропних лінійних при граничних умовах 1-4 родів, радіаційного типу, стаціонарних умовах Стефана. Математична постановка зазначених задач описується рівняннями теплопровідності різних модифікацій в циліндричній системі координатах при $\partial t/\partial \theta = 0$:

лінійна ізотропна задача

$$\lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + q_v(r, z), r, z \in \Omega \quad (1)$$

де θ - азимутальний кут, °; λ - теплопровідність, Вт/(м·К); t - температура, °С; r - радіус, м; z - апліката, м; q_v - об'ємна густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; Ω - контур твірної тіла обертання (розрахункова область);

лінійна ортотропна задача

$$\lambda_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \lambda_z \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + q_v(r, z), r, z \in \Omega, \quad (2)$$

де λ_r - теплопровідність в напрямку r , Вт/(м·К); λ_z - теплопровідність в напрямку z , Вт/(м·К);

нелінійна ізотропна задача

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v(r, z), r, z \in \Omega. \quad (3)$$

Граничні умови (ГУ) для (1)-(3):

1-го роду - $t|_{\Gamma} = f(r, z)|_{\Gamma}$, де Γ - границя області Ω ;

2-го роду - $q_n|_{\Gamma} = -\lambda(t) \partial t / \partial n$, де q - густина теплового потоку, Вт/м²; n - нормаль до границі області Ω ;

3-го роду - $-\lambda(t) \partial t / \partial n = \alpha(t_p - t)$, α - коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); t_p - температура рідини, °С;

4-го роду (для спряженої області) - $t = t^+$, $q_n^- = q_n^+$ (знаки “-” і “+” означають, що величини беруться зліво і справа від границі між підобластями);

ГУ радіаційного типу - $-\lambda(t) \partial t / \partial n = \sigma \varepsilon_{np} (T_p^4 - T^4)$, де σ - постійна Стефана-Больцмана, Вт/(м²·К⁴); T - температура, К; $\varepsilon_{np} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$ - приведена степінь чорноти системи тіл; ε_1 - степінь чорноти границі області Ω ; ε_2 - степінь чорноти рідини;

ГУ комбінованого типу включають в себе умови конвективного (3-го роду) та радіаційного теплообміну;

стаціонарні умови Стефана - $t = t^+ = t_f$, $q_n^- = q_n^+$, де t_f - температура фазового переходу 1-го роду, °С.

Методики розв'язання стаціонарної лінійної ізотропної вісесиметричної задачі теплопровідності без внутрішніх джерел теплоти прямим методом граничних елементів (МГЕ) викладені в [1,2].

Граничне інтегральне рівняння для постановки (1) при вісесиметричних граничних умовах має вигляд

$$\alpha(\xi) t(\xi) + \int_{\Gamma} t(x) \int_0^{2\pi} q^*(\xi, x) d\theta(x) r(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) \int_0^{2\pi} t^*(\xi, x) d\theta(x) r(x) d\Gamma(x) - \int_{\Omega} q_v(x) \int_0^{2\pi} t^*(\xi, x) d\theta(x) r(x) d\Omega(x) \quad (4)$$

Фундаментальний розв'язок лінійної задачі для трьохвимірного випадку в циліндричній системі координат записується як

$$t^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{r_{\xi}^2 + r_x^2 - 2r_{\xi}r_x \cos(\theta_{\xi} - \theta_x) + (z_{\xi} - z_x)^2}}, \quad (5)$$

де ξ - індекс джерела, x - індекс змінної координати.

Використовуючи заміну [1,2] $a = r_\xi^2 + r_x^2 + (z_\xi - z_x)^2$, $b = 2r_\xi r_x$, $m^2 = \frac{2b}{a+b}$, та виконуючи деякі перетворення і інтегрування по θ виразу (5), отримуємо

$$t^*(\xi, x) = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{2}{\sqrt{a+b}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{2}{\sqrt{a+b}} K(m), \quad (6)$$

де $K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}}$ - повний еліптичний інтеграл 1-го роду.

Нормальна похідна від фундаментального розв'язку, домножена на $-\lambda$, визначається як

$$q^*(\xi, x) = -\lambda \frac{\partial t^*}{\partial n} = -\lambda \frac{\partial t^*}{\partial (-n')} = -\lambda \left[\frac{\partial t^*}{\partial r_x} (-n_r) + \frac{\partial t^*}{\partial z_x} (-n_z) \right] = \lambda \left[\frac{\partial t^*}{\partial r_x} n_r + \frac{\partial t^*}{\partial z_x} n_z \right], \quad (7)$$

де n і n' - внутрішня та зовнішня нормалі по відношенню до границі області; n_r і n_z - компоненти зовнішньої нормалі (направляючі косинуси) в точці джерела.

Після виконання диференціювання (7) отримуємо:

$$q^*(\xi, x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r_x} \left[\frac{a+b}{a-b} E(m) - K(m) \right] n_r + \frac{-(r_\xi + r_x)n_r + (z_\xi - z_x)n_z}{a-b} E(m) \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r_x} \left[\frac{r_\xi^2 - r_x^2 + (z_\xi - z_x)^2}{a-b} E(m) - K(m) \right] n_r + \frac{(z_\xi - z_x)n_z}{a-b} E(m) \right\}, \quad (8)$$

де $E(m)$ - повний еліптичний інтеграл 2-го роду.

Коефіцієнти впливу H і G визначаються із формул:

$$\text{при } i \neq j \quad H_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^*(\xi, x) r(x) d\Gamma, \quad i, j=1, N \quad (9)$$

де N - кількість граничних вузлів;

при $i=j$, $H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}$, $i=1, N$; при $r_\xi=r_x=0$ на осі симетрії $H_{ii}=2$;

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} t^*(\xi, x) r(x) d\Gamma = \frac{2}{\pi\lambda} \int_{\Gamma_j} \frac{K(m)}{\sqrt{a+b}} r_x d\Gamma, \quad i, j=1, N \quad (10)$$

Коефіцієнти впливу (9) та (10) обчислюються з використанням квадратурної формули Гауса. При цьому еліптичні інтеграли 1 та 2-го родів обчислюються за допомогою апроксимуючих поліномів [3]

$$K(m) = \sum_{i=0}^4 \left[a_i m_1^i + b_i m_1^i \ln(1/m_1) \right] + \varepsilon(m),$$

де $m_1^2 = 1 - m^2$, a_i і b_i - сталі із довідника [3], $\varepsilon(m) \leq 2 \times 10^{-8}$.

$$E(m) = 1 + \sum_{i=1}^4 \left[c_i m_1^i + d_i m_1^i \ln(1/m_1) \right] + \varepsilon(m),$$

де c_i і d_i - сталі із довідника [3], $\varepsilon(m) \leq 2 \times 10^{-8}$.

Система граничних рівнянь (4) у дискретній формі приймає вигляд

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} t_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - B_i, \quad i=1, N \quad (11)$$

$$\text{де } B_i = \int_{\Omega} q_v(x) t^*(\xi, x) r_x d\Omega(x) = \frac{2}{\pi\lambda} \int_{\Omega} q_v(x) \frac{K(m)}{\sqrt{a+b}} r_x d\Omega(x). \quad (12)$$

При $r_\xi=r_x=0$ на осі симетрії $G_{ij}=0$ та $B_i=0$. В загальному випадку (12) можна обчислити за допомогою інтегрування по трикутникам при використанні триангуляції для дискретизації розрахункової області.

Температури в середині розрахункової області Ω обчислюються по формулі

$$t_i = \left[\sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N H_{ij} t_j + B_i \right] / 2, \quad i=1, M, \quad (13)$$

де M - кількість вузлів в середині області Ω .

В (13) коефіцієнти G , H та B також обчислюються по формулам (9), (10) і (12), як і для границі області Ω . Причому коефіцієнти $H_{ij} \in \Omega$ підлягають корегуванню, оскільки відомо, що $\sum_{j=1}^N H_{ij} = -2$, $i=1, M$.

Корегування виконується з урахуванням вагового внеску кожного коефіцієнту. Ця процедура значно знижує похибку при розрахунках температур в середині області Ω .

При врахуванні ортопії теплопровідності (2) маємо $\lambda_r \neq \lambda_z \neq \lambda_\theta$, де λ_r , λ_z , λ_θ - величини теплопровідності матеріалу по ортам. Якщо покласти, що $\lambda_\theta = \lambda_r$, то в виразах (6), (8)-(10), (12) легко перейти до ортотропної моделі, зробивши заміну $a = (r_\xi^2 + r_x^2) / \lambda_r + (z_\xi - z_x)^2 / \lambda_z$, $b = 2r_\xi r_x / \lambda_r$, $\lambda = \lambda_r \sqrt{\lambda_z}$.

При роз'язанні ізотропної та ортотропної лінійних задач спочатку обчислюються коефіцієнти впливу по формулам (9) і (10) для розрахункової області, чи для декількох підобластей, якщо область спряжена. Потім розв'язується система лінійних рівнянь (11) з урахуванням граничних умов. Якщо область спряжена, то матриця системи (11) вже не буде повністю заповнена і будується за методикою, викладеною в [1,2]. При граничних умовах радіаційного типу при $\lambda \neq f(t)$ задача стає нелінійною і її треба розв'язувати ітераційним шляхом [1], наприклад, з використанням лінеаризації по методу Ньютона [4]. Останнім етапом цього розрахунку є обчислення температур в середині області (підобластей) по формулі (11).

При граничних умовах стаціонарної задачі Стефана лінійні задачі також стають нелінійними тому, що має місце наперед не визначена границя розподілу фаз. Для роз'язання такої задачі також використовуються ітераційні алгоритми [5]. Наприклад, нехай задані дві підобласті з суміжною наперед не визначеною границею розподілу фаз. Треба знайти поле температур та координати границі розподілу фаз. Алгоритм роз'язання цієї задачі слідує:

1. Задається початкове положення границі розподілу фаз.
2. Обчислюються коефіцієнти впливу для обох підобластей по (9) і (10), розв'язується система лінійних алгебраїчних рівнянь (11) з урахуванням граничних умов (при цьому умови на границі розподілу фаз вважаються умовами 4-го роду) та обчислюються температури в середині підобластей.
3. По температурі кристалізації, чи плавлення шляхом інтерполяції між внутрішніми та граничними вузлами визначається нове положення границі розподілу фаз.
4. Якщо модуль різниці між знайденим та попереднім положеннями границі розподілу фаз менше наперед заданої величини, то розрахунок закінчується, у зворотньому випадку - повторюється з п. 2.

При розв'язанні нелінійних ізотропних задач теплопровідності (3) методом МГЕ, коли, наприклад, $\lambda(t) = c + bt + at^2$, використовується пряме та зворотнє перетворення Кірхгофа

$$\varphi = \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t) dt, \quad t = \Lambda^{-1}(\varphi).$$

Пряме перетворення приводить нелінійну задачу до лінійної відносно φ . Для збереження універсальності алгоритму зворотнє перетворення найкраще виконувати шляхом роз'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь методом Ньютона [4].

Для роз'язання нелінійної задачі теплопровідності можна скористатися удосконаленим алгоритмом II, який викладено в [4]. Цей алгоритм побудовано на лінеаризації нелінійних граничних умов за методом Ньютона. При цьому лінеаризована система рівнянь відносно δt^{k+1} для нелінійних ГУ в вектрній формі має вигляд:

$$\begin{aligned} & \text{для ГУ 3-го роду} \\ & (H\lambda(t^k) + G\alpha)\delta t^{k+1} = -H\varphi^k + G\alpha(t_p - t^k) - B, \\ & \text{де } k - \text{ номер ітерації, } t^{k+1} = t^k + \delta t^{k+1}, \\ & \text{для ГУ радіаційного типу} \\ & \{H\lambda(t^k) + G4\sigma\epsilon_{\text{пр}} \times [T^k]^3\} \delta t^{k+1} = -H\varphi^k + G4\sigma\epsilon_{\text{пр}} \times [(T_p)^4 - (T^k)^4] - B, \\ & \text{для ГУ 4-го роду} \\ & \text{де } T^{k+1} = T^k + \delta t^{k+1}, \\ & H[\lambda(t^k) - \varphi^k/t^k + \lambda^*(t^k)]\delta t^{k+1} - Gq^{k+1} = -H\varphi^k - B, \end{aligned}$$

$$\text{де } \lambda^* = \frac{1}{\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} \lambda(t) dt = \varphi / \bar{t} - \text{ середньоінтегральна теплопровідність.}$$

Для реалізації алгоритму [4] в формулах (9)-(13) треба зробити деякі зміни: в (10) і (12) $\lambda=1$, а в (11) і (13) замість t треба записати φ . Для розв'язання нелінійної задачі з використанням методики [4] з точністю $1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}$ необхідно виконати лише 6-7 ітерацій.

При розв'язанні стаціонарної задачі Стефана при $\lambda=f(t)$ треба об'єднати два алгоритми: задачі Стефана [5] і нелінійної задачі [4].

У відповідності з викладеними методиками розроблені універсальні програми для розв'язання представлених задач з використанням лінійних елементів з подвійними вузлами при кутах $< 180^\circ$. Програми побудовані таким чином, що за їх допомогою можна обчислювати спряжені області з необмеженою кількістю

підобластей при будь-яких граничних умовах. Тестування програм проводилось на декількох простих прикладах.

Приклад 1.

Циліндр має радіус $r_0=1\text{м}$, висоту $h=1\text{м}$, теплопровідність $\lambda=2\text{Вт}/(\text{м}\times\text{К})$, густину внутрішніх джерел теплоти $q_v=1500\text{Вт}/\text{м}^3$. Граничні умови: на основах та осі циліндра $\partial t/\partial n=0$; на боковій поверхні - умови 3-го роду, температура рідини $t_p=100\text{ }^\circ\text{C}$, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha=20\text{Вт}/(\text{м}^2\times\text{К})$. Результати співставлення розрахунків з аналітичним розв'язком [6] показані в табл.

Таблиця.

Температура на осі циліндра $t_0, \text{ }^\circ\text{C}$		Температура на боковій поверхні циліндра $t_0, \text{ }^\circ\text{C}$		Густина теплового потоку на боковій поверхні циліндру $q, \text{ Вт}/\text{м}^2$	
аналітичний розв'язок	МГЕ	аналітичний розв'язок	МГЕ	аналітичний розв'язок	МГЕ
325	324.966	137.5	137.504	750	750.082

Приклад 2.

Циліндр має радіус $r_0=2\text{м}$, висоту $h=1\text{м}$, теплопровідність $\lambda(t) = 2+0.1t\text{ Вт}/(\text{м}\times\text{К})$. Граничні умови: на осі та боковій поверхні циліндра $\partial t/\partial n=0$; на основах циліндра умови 1-го роду, $t_1=100\text{ }^\circ\text{C}$, $t_2=200\text{ }^\circ\text{C}$. Співставлення проводилося по координаті відповідних ізотерм ($t=105, 115, 125\text{ }^\circ\text{C}$ і т.д.). Розбіжність з аналітичним розв'язком не перевищує 0.025 мм .

Приклад 3.

Задані умови стаціонарної задачі Стефана в циліндрі з радіусом $r_0=2\text{м}$ і висотою $h=1\text{м}$: початкове положення плоскої границі розподілу фаз по висоті $h_1=0.1\text{м}$, температура фазового переходу $t_f=150\text{ }^\circ\text{C}$, рівність густини теплових потоків по обидві сторони границі розподілу фаз $-\lambda_1\partial t/\partial n_- = -\lambda_2\partial t/\partial n_+$, де $\lambda_1=6\text{Вт}/(\text{м}\times\text{К})$ та $\lambda_2=2\text{Вт}/(\text{м}\times\text{К})$ теплопровідності першої та другої фази. Граничні умови: на осі та боковій поверхні циліндра $\partial t/\partial n=0$; на основах циліндра умови 1-го роду, $t_1=100\text{ }^\circ\text{C}$, $t_2=200\text{ }^\circ\text{C}$. Чисельний розв'язок по визначенню стаціонарного положення плоскої границі розподілу фаз співпадає з точним і становить 0.75м .

Також проведені модельні розрахунки температурних полів для квазістаціонарного процесу вирощування кристалів в багаточашковому тиглі методом Бріджмена-Стокбаргера. Результати цих розрахунків показані на рис 1.

Висновки.

1. Розглянута методика на базі прямого МГЕ чисельного розв'язання стаціонарної вісесиметричної лінійної задачі теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти.
2. Розроблені методики чисельного розв'язання лінійних ортотропних та нелінійних стаціонарних вісесиметричних задач теплопровідності при граничних умовах 1-4 родів, радіаційного типу та стаціонарних умовах Стефана. Для розв'язання нелінійних задач з використанням розроблених методик з точністю $1\times 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}$ необхідно виконати лише 6-7 ітерацій.
3. Розроблені універсальні програми розрахунку стаціонарних вісесиметричних температурних полів для будь-якої форми твірної і кількості спряжених підобластей при всіх видах граничних умов, проведено їх тестування та виконані модельні розрахунки.
4. Розроблені методики та програми можуть використовуватись при практичних розрахунках стаціонарного теплообміну в будь-яких тілах обертання, циліндричних печах, кристалізаторах і т.д.

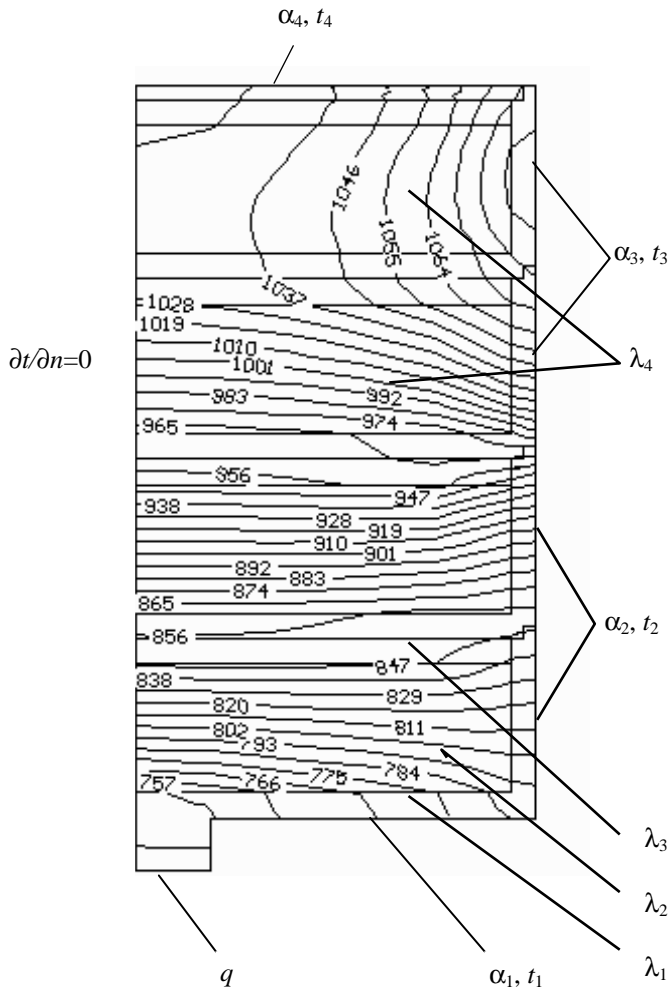


Рис. 1. Температурне поле в багаточашковому тиглі.
 $\lambda_1=30$ Вт/(м× К); $\lambda_2=3$ Вт/(м× К); $\lambda_3=8$ Вт/(м× К);
 $\lambda_4=2$ Вт/(м× К); $q=-15000$ Вт/м²; $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=100$ Вт/(м²× К);
 $t_1=700^\circ\text{C}$; $t_2=800^\circ\text{C}$; $t_3=1200^\circ\text{C}$; $t_4=1000^\circ\text{C}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов/ Пер. с англ. - М: Мир, 1987, - 524с.
2. Бенерджи П., Баттерфильд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках/ Пер. с англ. - М: Мир, 1984. - 494 с.
3. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган, М: Наука, 1979, 830с.
4. Карвацкий А.Я., Панов Е.Н., Демидович А.В. К вопросу решения нелинейных стационарных задач теплопроводности методом граничных элементов / - Киев, 1996, 13 с., - Деп. в УкрИНТЭИ N 226 - Ук96.
5. Панов Е.Н., Пингин В.В., Демидович А.В., Карвацкий А.Я. Математическое моделирование теплового состояния алюминиевого электролизера // Цветные металлы. 1996. N 9. С. 70-74.
6. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача /Учебн. для вузов. - М: Энергоиздат, 1981. - 416 с.