

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Анотація. На базі прямого методу граничних елементів розроблено чисельну методику та програмне забезпечення для розв'язання нестационарних тривимірних задач теплопровідності в тілах складної форми. Представлені результати розрахунків нестационарних температурних полів катодної секції і печі графітації.

Аннотация. На основе прямого метода граничных элементов разработана численная методика и программное обеспечение для решения нестационарных трехмерных задач теплопроводности в телах сложной формы. Представлены результаты расчетов нестационарных температурных полей катодной секции и печи графитации.

Summary. On the base of direct boundary elements method both numerical method and software are developed for 3D transient heat transfer in complex shape bodies. Results of transient temperature field calculation in cathode block and grafitation oven are represented.

Вступ

Провідними фірмами світу для розв'язання багатьох інженерних задач (в тому числі і задач теплопровідності) використовуються комерційні програмні продукти, до яких належать ANSYS, ABAQUS, Cosmos/M, і т.д. [1]. Математичною базою цих розробок є різні модифікації методу скінчених елементів (МСЕ). Однак, існує багато задач теплопровідності, які можуть бути ефективно розв'язані за допомогою іншого методу, а саме методу граничних елементів (МГЕ) [2-5]. МГЕ може дати результат в простому формулюванні для різних інженерних задач, наприклад, лінійних і нелінійних задач з теорії поля. Застосування МГЕ дозволяє знизити розмірність задачі на одиницю, і таким чином уникнути проблеми дискретизації внутрішньої частини тіла, яка обов'язкова при використанні МСЕ.

В порівнянні з МСЕ, МГЕ має певні переваги в тому, що зменшується кількість вузлів, тобто розмірність матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) і відповідно вимоги до ресурсів комп'ютера. Однак при реалізації МГЕ виникають деякі проблеми:

- перетворення інтегралів по об'єму в граничні інтегральні вирази;
- багатозначність першої похідної на суміжних гранях, які належать різним площинам;
- сингулярність підінтегральних функцій при визначенні діагональних коефіцієнтів впливу для потоку і т.д.

Саме розв'язанню цих проблем МГЕ присвячена теоретична частина статті.

Постановка задачі

Нелінійне нестационарне рівняння теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти для неоднорідного тіла (складної конструкції) має вигляд

$$c_{pi}(t)\rho_i(t)\frac{\partial t}{\partial \tau} = \text{div}[\lambda_i(t)\nabla t(X)] + q_{vi}(X), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

де $c_{pi}(t)$, $\rho_i(t)$, $\lambda_i(t)$ - температурна залежність відповідно, питомої ізобарної теплоємності, Дж/(м³·К), густини, кг/м³ і теплопровідності, Вт/(м·К) i -го елемента конструкції; t - температура, °С; τ - час, с; $X(x, y, z) \in \Omega$ - декартові координати, м; q_{vi} - щільність внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; ∇ - оператор Гамільтона.

Початкові умови:

$$t(x, y, z)|_{\tau=0} = t_{0i}. \quad (2)$$

Граничні умови для рівняння (1) при $\tau > 0$ накладаються наступним чином:

– на границі (поверхні) Γ_1 розглядаються умови Дирихле

$$t|_{\Gamma_1} = t(x, y, z), \quad (3)$$

– на границі Γ_2 – умови Неймана

$$\vec{n} \cdot [-\lambda_i(t)\nabla t] = q(x, y, z), \quad (4)$$

де \vec{n} - зовнішня нормаль до границі; q - щільність теплового потоку, Вт/м²;

– на границі Γ_3 – умови Фур'є або конвективного типу

$$\vec{n} \cdot [-\lambda_i(t)\nabla t] = \alpha_{\text{эф}}(t)(t - t_d), \quad (5)$$

де $\alpha_{\text{эф}}$ - ефективний коефіцієнт тепловіддачі, який враховує конвекцію і теплове випромінювання, Вт/(м²·К); t_d – температура довкілля, °С;

– на границі Γ_4 – умови контакту між різними елементами конструкції, або умови спряження, в яких також може враховуватись контактний термічний опір

$$\begin{cases} \{t\} = r_\lambda^+ \vec{n} \cdot \vec{q}^+ \\ \{\vec{n} \cdot \vec{q}\} = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

де $\{t\} = t^+ - t^-$, t^\pm - значення температури ліворуч і праворуч від границі; $\{\vec{n} \cdot \vec{q}\} = \vec{n}^+ \cdot \vec{q}^+ - \vec{n}^- \cdot \vec{q}^-$, \vec{q} - вектор щільності теплового потоку, Вт/м²; r_λ - контактний термічний опір, (м²·К)/Вт. При $r_\lambda = 0$ - виконуються умови абсолютного контакту.

Методика чисельного розв'язання

Для розв'язку задачі (1)-(6) використовується прямий метод граничних елементів (ПМГЕ) [2,5], в якому невідомими змінними інтегрального рівняння є змінні вихідної задачі і мають певний фізичний зміст.

До основних етапів чисельної реалізації ПМГЕ [2,10] належать:

- перетворення інтегралів по об'єму в граничні інтегральні вирази;
- дискретизація границь тіла Γ_i ($i = 1, \dots, 4$);
- визначення коефіцієнтів впливу;
- формування матриці СЛАР при різних граничних умовах, які задані на Γ_i ($i = 1, \dots, 4$);
- усунення сингулярності СЛАР та її розв'язок.

Спочатку розглянемо чисельну методику для лінійного рівняння, а потім – для нелінійного рівняння теплопровідності.

Лінійне нестационарне неоднорідне рівняння теплопровідності для області $\Omega \in R^3$, границя якої є об'єднанням Γ_i ($i = 1, \dots, 4$) має вигляд

$$\frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda}, \quad \tau > 0, \quad (7)$$

де a - температуропровідність, м²/с.

На Ω при $\tau = 0$ задано початкові умови (2). На границях Γ_i ($i = 1, \dots, 3$) при $\tau > 0$ ставиться i -а крайова задача (3)-(5), а на Γ_4 - умови спряження (6).

Граничне інтегральне рівняння (7) для граничних умов Дирихле і Неймана при застосуванні класичного МГЕ має вигляд [2]

$$c_M t_{M, \tau_F} + \int_{\tau_0 \Gamma}^{\tau_F} \int at q^* d\Gamma d\tau = \int_{\tau_0 \Gamma}^{\tau_F} \int a q t^* d\Gamma d\tau + \int_{\tau_0 \Omega}^{\tau_F} \int a q_v / \lambda t^* d\Omega d\tau + \int_{\tau_0 \Omega}^{\tau_F} t_{\tau_0} t^* d\Omega, \quad (8)$$

де c_M - коефіцієнт, який залежить від типу граничного елемента; M – індекс джерела; τ_0, τ_F - час початку і кінця процесу; t^*, q^* - фундаментальний розв'язок (7), який залежить від часу, і його нормальна похідна.

Для R^3 задач маємо [2], що

$$t^* = \frac{1}{[4\pi a(\tau_F - \tau)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(\tau_F - \tau)}\right), \quad (9)$$

$$q^* = \frac{2d}{[4a(\tau_F - \tau)]^{5/2} \pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(\tau_F - \tau)}\right), \quad (10)$$

де r - відстань між джерелом і поточною точкою Ω ; $d = -\vec{n} \cdot \vec{r}$.

В рівняння (8) окрім граничних інтегралів входять два інтеграли по об'єму, які також треба перетворити у граничні або зовсім усунути.

Для перетворення інтеграла виду $\int_{\tau_1 \Omega}^{\tau_2} a q_v / \lambda t^* d\Omega d\tau$ в граничний інтегральний вираз

можна використати окремий випадок застосування методу двоїстої взаємності (МДВ) [6].

Нехай

$$P = \frac{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2}{6} \frac{q_v}{\lambda}$$

- частинний розв'язок рівняння Пуасона $\nabla^2 P = \frac{q_v}{\lambda}$.

Тоді рівняння (7) можна записати в наступному вигляді

$$\nabla^2 t + \nabla^2 P = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau}, \text{ або } \nabla^2 (t + P) = \frac{1}{a} \frac{\partial (t + P)}{\partial \tau},$$

а (8) за допомогою II теорема Гріна прийме вигляд

$$\begin{aligned} c_M t_{M, \tau_F} + \int_{\tau_0 \Gamma}^{\tau_F} \int a t q^* d\Gamma d\tau = \int_{\tau_0 \Gamma}^{\tau_F} \int a q t^* d\Gamma d\tau + \int_{\Omega} t_{\tau_0} t^* d\Omega - \\ - c_M P_{M, \tau_F} - \int_{\tau_0 \Gamma}^{\tau_F} \int a P q^* d\Gamma d\tau + \int_{\tau_0 \Gamma}^{\tau_F} \int a \frac{\partial P}{\partial n} t^* d\Gamma d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

Таким чином в (11) вже відсутній інтеграл по Ω для визначення впливу внутрішніх джерел теплоти.

Для перетворення в граничний інтеграла виду $\int_{\Omega} t_{\tau_0} t^* d\Omega$ можна використати метод МДВ.

Наприклад, при використанні фундаментального розв'язку (7), який не залежить від часу,

інтеграл виду $\int_{\Omega} \frac{\lambda}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} t^* d\Omega$ представляють за допомогою апроксимуючих функцій (f)

$\frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^M f^j(x) \dot{\alpha}^j(\tau)$ і далі перетворюють у граничний [7], де M – число граничних вузлів.

Існує також більш складна методика перетворення, яка базується на методі множинної взаємності [8].

Зрештою, коли початкова температура тіла дорівнює нулю ($t_{\tau_0} \equiv 0$), то $\int_{\Omega} t_{\tau_0} t^* d\Omega \equiv 0$.

Відповідно (8) перетворюється у повністю граничне інтегральне рівняння при відсутності необхідності визначення розподілу температури у проміжні моменти часу t_{τ} , де $\tau_0 < \tau < \tau_F$.

Теж саме можна зробити, коли $t_{\tau_0} \neq 0$ [6].

Нехай в початковий момент часу τ_0 поле температур t_0 є розв'язком рівняння Лапласа $\nabla^2 t_0 = 0$, а в момент часу τ_F поле температур відповідає нестационарному рівнянню

теплопровідності $\nabla^2 t = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau}$. Віднімаючи із другого рівняння перше, одержимо

$$\nabla^2 (t - t_0) = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{a} \frac{\partial (t - t_0)}{\partial \tau}. \quad (12)$$

Для початкового моменту часу τ_0 маємо, що $t - t_0 = 0$. Тобто, якщо ввести заміну $u = t - t_0$, інтегральне рівняння для (12) буде повністю граничним, тому що $u_0 = 0$

$$c_M u_{M, \tau_F} + \int_{\tau_0 \Gamma}^{\tau_F} \int a u q^* d\Gamma d\tau = \int_{\tau_0 \Gamma}^{\tau_F} \int a q t^* d\Gamma d\tau. \quad (13)$$

Після розв'язку (13) дійсне значення температури в момент часу τ_f можна знайти із простого рівняння

$$t_{\tau_f} = u + t_0. \quad (14)$$

Для описання 3D тіл в даній методиці використовуються плоскі багатогранники, далі грані [10]. Для дискретизації граней застосовується триангуляція за методом Делоне. Триангуляція Γ_i базується на відображенні довільної плоскої грані з 3D в 2D, що дозволяє значно полегшити процедуру розбиття довільної кусково-плоскої границі. Одиницею триангуляції є плоска 2D грань, причому вузли по контурах сусідніх граней (ребрах) для Γ_i ($i=1, \dots, 3$) є подвійними, тобто незв'язаними між собою. Виконання відповідності між вузлами накладається тільки на вузли по всій площині грані для Γ_4 . Після виконання триангуляції грані виконується зворотній перехід з 2D в 3D.

У відповідності з запропонованою дискретизацією за граничні елементи вибрані лінійні трикутні елементи [2], в яких температура за часом змінюється за лінійним законом. При використанні лінійних елементів нумерація вершин трикутників, які оточують вузол j , виконується таким чином, щоб вершина, яка співпадає з вузлом j , мала номер 3 в кожному із вказаних трикутників [10]. В кожному трикутнику використовується лінійна апроксимація функцій за координатами, наприклад, температура і щільність теплового потоку задаються формулами

$$\begin{cases} t(\eta_1, \eta_2) = t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + t_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \\ q(\eta_1, \eta_2) = q_1\eta_1 + q_2\eta_2 + q_3(1 - \eta_1 - \eta_2). \end{cases}$$

Координати визначаються за формулами

$$\begin{cases} x(\eta_1, \eta_2) = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \\ y(\eta_1, \eta_2) = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + y_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \\ z(\eta_1, \eta_2) = z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + z_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \end{cases}$$

де індекси 1,2,3 – відносяться до номерів вершин трикутників; (η_1, η_2) – косокутна система координат.

Введемо лінійну апроксимацію за часом для температури і потоку

$$\begin{cases} t = \frac{t_{j,f-1}(\tau_f - \tau) + t_{j,f}(\tau - \tau_{f-1})}{\Delta\tau_f} \\ q = \frac{q_{j,f-1}(\tau_f - \tau) + q_{j,f}(\tau - \tau_{f-1})}{\Delta\tau_f} \end{cases}, \quad (15)$$

де $\Delta\tau_f = \tau_f - \tau_{f-1}$.

У відповідності до (15) і використовуючи схему 2 [2,6] для врахування зміни температури за часом запишемо формули для визначення коефіцієнтів впливу

$$H1_{ij,F,f} = \frac{1}{\Delta\tau_f} \int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} \int_{\Gamma_j} a(\tau_f - \tau) \cdot q^* d\Gamma d\tau \text{ для } t_{f-1} \text{ при } \tau_{f-1}, \quad (16)$$

$$H2_{ij,F,f} = \frac{1}{\Delta\tau_f} \int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} \int_{\Gamma_j} a(\tau - \tau_{f-1}) \cdot q^* d\Gamma d\tau \text{ для } t_f \text{ при } \tau_f, \quad (17)$$

$$G1_{ij,F,f} = \frac{1}{\Delta\tau_f} \int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} \int_{\Gamma_j} a(\tau_f - \tau) \cdot t^* d\Gamma d\tau \text{ для } q_{f-1} \text{ при } \tau_{f-1}, \quad (18)$$

$$G2_{ij,F,f} = \frac{1}{\Delta\tau_f} \int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} \int_{\Gamma_j} a(\tau - \tau_{f-1}) \cdot t^* d\Gamma d\tau \text{ для } q_f \text{ при } \tau_f. \quad (19)$$

Діагональні коефіцієнти при $i = j$:

$$H1_{ij,F,f} = 0, \quad (20)$$

а $H2_{ij,F,f}$ можна визначати як при стаціонарній теплопровідності, наприклад,

$$H2_{ij,F,f} = H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M H_{ij}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (21)$$

де H_{ij} визначається через фундаментальний розв'язок, який не залежить від часу [10].

Використовуючи фундаментальний розв'язок (9),(10), можна виконати аналітичне інтегрування за часом для (16)-(19). Тоді остаточні формули для обчислення коефіцієнтів впливу для $H1$ і $G1$ при $f = F$ приймають вигляд

$$H1_{ij,F,f} \approx \frac{1}{4\pi\lambda\Delta\tau_f} \sum_{k=1}^K \left\{ |J|_k \sum_{\ell=1}^n \left[\frac{d_{ijk\ell}}{r_{ijk\ell}^3} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{r_{ijk\ell}^2}{4 \cdot a \cdot (\tau_F - \tau_{f-1})}} \right) \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{r_{ijk\ell}^2}{2a} - \tau_F + \tau_f \right) \right] (1 - \eta_{1\ell} - \eta_{2\ell}) \cdot w_\ell \right\}, \quad i, j = \overline{1, M} \quad (22)$$

$$G1_{ij,F,f} \approx \frac{1}{4\pi\lambda\Delta\tau_f} \sum_{k=1}^K \left\{ |J|_k \sum_{\ell=1}^n \left[\frac{1}{r_{ijk\ell}} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{r_{ijk\ell}^2}{4 \cdot a \cdot (\tau_F - \tau_{f-1})}} \right) - 1 \right] \times \left(\frac{r_{ijk\ell}^2}{2a} + \tau_F - \tau_f \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \exp \left[\frac{-r_{ijk\ell}^2}{4 \cdot a \cdot (\tau_F - \tau_{f-1})} \right] \times \frac{r_{ijk\ell} \cdot \sqrt{a(\tau_F - \tau_{f-1})}}{a \cdot \sqrt{\pi}} \right] (1 - \eta_{1\ell} - \eta_{2\ell}) \cdot w_\ell \right\}, \quad i, j = \overline{1, M} \quad (23)$$

де K – кількість трикутників, які оточують вузол j ; k – індекс трикутника; M – кількість граничних вузлів; $|J| = 2S_\Delta$ – якобіан; S_Δ – площа відповідного трикутника; $\eta_{1\ell}, \eta_{2\ell}, w_\ell$ – вузли і вага квадратурної формули Хамера [2,3]; n – число вузлів квадратурної формули; n_x, n_y, n_z – направляючі косинуси зовнішньої нормалі до площини; $\operatorname{erf}(x)$ – функція похибок Гауса;

$r_{ijk\ell} = \sqrt{(x_i - x_{jkl})^2 + (y_i - y_{jkl})^2 + (z_i - z_{jkl})^2}$ – відстань між джерелом і поточним вузлом;

$d_{ijk\ell} = (x_i - x_{jkl})n_{xk} + (y_i - y_{jkl})n_{yk} + (z_i - z_{jkl})n_{zk}$;

$$\begin{cases} x_{jkl} = [x_1\eta_{1\ell} + x_2\eta_{2\ell} + x_3(1 - \eta_{1\ell} - \eta_{2\ell})]_{jk}, \\ y_{jkl} = [y_1\eta_{1\ell} + y_2\eta_{2\ell} + y_3(1 - \eta_{1\ell} - \eta_{2\ell})]_{jk}, \\ z_{jkl} = [z_1\eta_{1\ell} + z_2\eta_{2\ell} + z_3(1 - \eta_{1\ell} - \eta_{2\ell})]_{jk}. \end{cases} \quad \text{- координати вузлів.}$$

Формули для обчислення коефіцієнтів впливу для $H2$ і $G2$ можна отримати аналогічно (22),(23). Для визначення щільності потоків на границях тіла права частина (23) розділена на теплопровідність матеріалу.

При обчисленні коефіцієнтів впливу крок інтегрування за часом повинен визначатись із співвідношення [7]

$$\Delta\tau \leq \frac{\max\{r^2\}}{4a}.$$

Після виконання розрахунків коефіцієнтів впливу можна перейти до запису СЛАР. Спочатку розглянемо найпростіший варіант, коли для однорідного тіла задана 1,2 крайова задача і внутрішнє джерело теплоти відсутнє. Тоді з врахуванням (20)-(23) дискретна форма (13) прийме вигляд

$$\sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^M (H1_{ij,F,f} t_{j,f-1} + H2_{ij,F,f} t_{j,f}) = \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^M (G1_{ij,F,f} q_{j,f-1} + G2_{ij,F,f} q_{j,f}), \quad i = \overline{1, M}, \quad (24)$$

де $t_{j,0}, q_{j,0} = 0, j = \overline{1, M}$.

У векторній формі (24) буде мати вигляд

$$\sum_{f=1}^F (\mathbf{H1}_{F,f} \mathbf{t}_{f-1} + \mathbf{H2}_{F,f} \mathbf{t}_f) = \sum_{f=1}^F (\mathbf{G1}_{F,f} \mathbf{q}_{f-1} + \mathbf{G2}_{F,f} \mathbf{q}_f). \quad (25)$$

Якщо температура і потоки відомі для всіх попередніх моментів часу, то для визначення температури t_F попередню систему рівнянь (25) потрібно переписати у формі

$$\mathbf{H2}_{F,F} \mathbf{t}_F = \mathbf{G2}_{F,F} \mathbf{q}_F + \mathbf{S}_F, \quad (26)$$

$$\text{де } \mathbf{S}_F = -\sum_{f=1}^{F-1} (\mathbf{H1}_{F,f} \mathbf{t}_{f-1} + \mathbf{H2}_{F,f} \mathbf{t}_f - \mathbf{G1}_{F,f} \mathbf{q}_{f-1} - \mathbf{G2}_{F,f} \mathbf{q}_f) - \mathbf{H1}_{F,F} \mathbf{t}_{F-1} + \mathbf{G1}_{F,F} \mathbf{q}_{F-1}.$$

Для складної неоднорідної області з внутрішніми джерелами теплоти при граничних умовах заданих на Γ_i ($i = 1, \dots, 4$) запис СЛАР у векторній формі буде мати вигляд

$$\begin{cases} \mathbf{H2}_{F,F} \mathbf{t}_F - \mathbf{G2}_{F,F} \mathbf{q}_F = \mathbf{S}_F + \mathbf{B}_F \\ (\mathbf{H2}_{F,F} + \mathbf{G2}_{F,F} \alpha_{e\phi}) \cdot \mathbf{t}_F = \mathbf{S}_{\alpha F} + \mathbf{B}_F \end{cases}, \quad (27)$$

де \mathbf{S}_F – визначається так само, як і в (26); \mathbf{B}_F – вектор, пов'язаний з внутрішнім джерелом теплоти (11); $\mathbf{S}_{\alpha F}$ – вектор, пов'язаний з граничними умовами Фур'є.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\alpha F} = & -\sum_{f=1}^{F-1} [(\mathbf{H1}_{F,f} + \mathbf{G1}_{F,f} \alpha_{e\phi}) \cdot \mathbf{t}_{f-1} + (\mathbf{H2}_{F,f} + \mathbf{G2}_{F,f} \alpha_{e\phi}) \cdot \mathbf{t}_f] - \\ & - (\mathbf{H1}_{F,F} + \mathbf{G1}_{F,F} \alpha_{e\phi}) \cdot \mathbf{t}_{F-1} + \sum_{f=2}^F (\mathbf{G1}_{F,f} + \mathbf{G2}_{F,f}) \alpha_{e\phi} t_{\partial} \\ \mathbf{B}_F = & \sum_{f=1}^F \left\{ -\mathbf{H1}_{F,f} \cdot \mathbf{P}_{f-1} - \mathbf{H2}_{F,f} \cdot \mathbf{P}_f + \left[\mathbf{G1}_{F,f} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial n} \right)_{f-1} + \mathbf{G2}_{F,f} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial n} \right)_f \right] \cdot \lambda \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

В системі (27) перше рівняння описує граничні умови Дирихле, Неймана і спряження між контактуючими поверхнями, а друге рівняння – граничні умови конвективного типу.

Система (27) записана для випадку, коли $t_{\tau_0} \equiv 0$. Якщо $t_{\tau_0} \neq 0$, то використовується підхід (12)-(14). При цьому температура при граничних умовах Дирихле і t_d при граничних умовах конвективного типу нормується по t_{τ_0} . Остаточна температура визначається після розв'язку (27) відносно u із (14).

Таким чином у загальному випадку для спряженої області, яка складається із множини об'ємів з різними однорідними властивостями, матриця (27) буде не повністю заповненою, тобто розрідженою. Тому при розв'язанні СЛАР виду (27) можна використовувати блочний, або стрічковий спосіб зберігання матриці [10].

Для виключення сингулярності матриці системи (27) використовуються технологія стиску граней по контуру на 0,1-0,2% від максимального лінійного розміру [9,10]. Ця процедура відбувається на етапі триангуляції, та використовується тільки для обчислення коефіцієнтів впливу $\mathbf{G1}$, $\mathbf{G2}$. Матриця СЛАР записується в стрічковому вигляді. При використанні МГЕ для неоднорідних тіл, тобто при наявності Γ_4 , матриця СЛАР є несиметричною. Коли кількість нижніх піддіагоналей значно перевищує кількість верхніх, то перед розв'язком СЛАР для зменшення об'єму арифметичних операцій матриця і вектор вільних членів переписується у зворотному порядку. Розв'язок СЛАР здійснюється за допомогою методу Гауса з врахуванням стрічкової структури матриці. Після розв'язання СЛАР визначаються невідомі температури і щільності нормальних потоків на границях. Для розрахунків компонент вектора щільності потоку на границях Γ_i використовується методика [10].

На практиці значна кількість матеріалів має слабку температурну залежність питомої теплоємності та густини, тому при розв'язанні багатьох інженерних задач можна знехтувати нелінійністю цих теплофізичних властивостей. На відміну від цього залежність теплопровідності від температури може бути значною і нехтування цим може привести до значних похибок при виконанні розрахунків температурних полів.

При розв'язанні нелінійної задачі (1)-(6) при наявності нелінійності теплопровідності в основу чисельної методики покладено пряме та обернене перетворення Кірхгофа [2,5] разом з ітераційним розв'язком системи рівнянь. Пряма підстановка Кірхгофа призводить до появи потенціалу

$$\varphi^k = \int_0^{t^k} \lambda(t) dt,$$

де k - номер ітерації.

При використанні лінійного закону зміни теплопровідності від температури

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t$$

маємо, що $\varphi^k = \lambda_0 t^k + \lambda_1 \frac{(t^k)^2}{2}$.

Введемо поняття середньоінтегральної теплопровідності

$$\bar{\lambda}(t^k) = \frac{1}{t^k} \int_0^{t^k} \lambda(t) dt \text{ або } \bar{\lambda}(t^k) = \lambda_0 + \lambda_1 \frac{t^k}{2}$$

Тоді потенціал можна представити у вигляді

$$\varphi^k = \bar{\lambda}(t^k) \cdot t^k.$$

Коефіцієнти впливу обчислюються за формулами (22),(23) при $\lambda = 1$.

Для запису системи типу (27) використовується часткова лінеаризація за методом Ньютона [10].

$$\begin{cases} \mathbf{H}2_{F,F} \varphi_F^k = \mathbf{G}2_{F,F} \mathbf{q}_F^k + \mathbf{S}_F + \mathbf{B}_F \\ \left\{ \mathbf{H}2_{F,F} \left[\bar{\lambda}(t_F^k) + \frac{\partial \bar{\lambda}(t_F^k)}{\partial t_F^k} \mathbf{t}_F^k \right] + \mathbf{G}2_{F,F} \alpha_{e\varphi} \right\} \cdot \delta \mathbf{t}_F^{k+1} = -\mathbf{H}2_{F,F} \varphi_F^k + \\ + \mathbf{G}2_{F,F} \alpha_{e\varphi} (t_\partial - \mathbf{t}_F^k) + \mathbf{S}_{\alpha F} + \mathbf{B}_F \\ \mathbf{H}2_{F,F} \left[\bar{\lambda}(t_F^k) + \frac{\partial \bar{\lambda}(t_F^k)}{\partial t_F^k} \mathbf{t}_F^k \right] \cdot \delta \mathbf{t}_F^{k+1} = -\mathbf{H}2_{F,F} \varphi_F^k + \mathbf{G}2_{F,F} \mathbf{q}_F^k + \mathbf{S}_F + \mathbf{B}_F \end{cases},$$

(29)

де

$$\mathbf{S}_F = -\sum_{f=1}^{F-1} (\mathbf{H}1_{F,f} \varphi_{f-1}^k + \mathbf{H}2_{F,f} \varphi_f^k - \mathbf{G}1_{F,f} \mathbf{q}_{f-1}^k - \mathbf{G}2_{F,f} \mathbf{q}_f^k) - \mathbf{H}1_{F,F} \varphi_{F-1}^k + \mathbf{G}1_{F,F} \mathbf{q}_{F-1}^k;$$

\mathbf{B}_F - визначається за формулою (28);

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\alpha F} = \sum_{f=1}^{F-1} \left[-\mathbf{H}1_{F,f} \varphi_{f-1}^k - \mathbf{H}2_{F,f} \varphi_f^k + \mathbf{G}1_{F,f} \alpha_{e\varphi} (t_\partial - \mathbf{t}_{f-1}^k) + \mathbf{G}2_{F,f} \alpha_{e\varphi} (t_\partial - \mathbf{t}_f^k) \right] - \\ - \mathbf{H}1_{F,F} \varphi_{F-1}^k + \mathbf{G}1_{F,F} \alpha_{e\varphi} (t_\partial - \mathbf{t}_{F-1}^k) \end{aligned}$$

В системі (29), так само як і в (27), перше рівняння описує граничні умови Дирихле і Неймана, друге рівняння – граничні умови конвективного типу, а третє рівняння - умови спряження.

Температура визначається в ітераційному циклі із розв'язку (29) за формулою $\mathbf{t}^{k+1} = \mathbf{t}^k + \delta \mathbf{t}^{k+1}$ при $t_{\tau_0} \equiv 0$. У випадку $t_{\tau_0} \neq 0$ необхідно скористуватись методикою (12)-(14).

Матриця системи рівнянь (29) має погану обумовленість, яка спричиняється 2-м та 3-м рівняннями системи. Для уникнення цього перед розв'язком (29) виконується нормування відповідних рядків матриці і вектора вільних членів шляхом ділення на $\bar{\lambda}(t^k)$.

Програмне забезпечення. Результати тестування

На базі викладеної методики чисельного розв'язання поставленої задачі розроблено універсальне програмне забезпечення для розв'язання тривимірних лінійних і нелінійних задач нестационарної теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти в тілах складної геометрії

при різних комбінаціях граничних умов. Прототипом для створення даної розробки є програмний продукт представлений в [9,10]. Тестування програмного забезпечення проводилося на декількох простих прикладах, для яких відомі дані точних рішень.

Приклад 1. Нестационарна теплопровідність при охолодженні необмеженої пластини при граничних умовах конвективного типу [11]: товщина пластини $2\delta = 20\text{мм}$, початкова температура $t_0 = 140^\circ\text{C}$, температура повітря $t_{\text{пов}} = 15^\circ\text{C}$, час з початку охолодження $\tau = 20\text{хв.}$, теплопровідність гуми $\lambda = 0,175\text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, температуропровідність гуми $a = 0,833\cdot 10^{-7}\text{ м}^2/\text{с}$, коефіцієнт тепловіддачі від гуми до повітря $\alpha = 65\text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ (табл. 1).

Приклад 2. Нестационарна теплопровідність при нагріві куба. Розміри: $500\times 500\times 500\text{ мм}$. Теплофізичні властивості: теплопровідність $\lambda = 7\text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, питома ізобарна теплоємність $c_p = 500\text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, густина $\rho = 1500\text{ кг/м}^3$, температуропровідність $a = 9,33(3)\cdot 10^{-6}\text{ м}^2/\text{с}$. Початкова температура: $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Граничні умови: Фур'є на верхньому і нижньому торцях куба, а на бічних поверхнях адіабатні умови: температура повітря $t_{\text{пов}} = 100^\circ\text{C}$, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 5; 50\text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ (табл. 2).

Приклад 3. Стационарна теплопровідність при нагріві куба при наявності внутрішнього джерела теплоти $q_v = 15000\text{ Вт/м}^3$, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 20\text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$. Інші вихідні дані такі ж самі, як в прикладі 2 (табл. 3). Стационарний розв'язок отримано методом встановлення шляхом розв'язання нестационарної задачі.

Результати чисельних експериментів

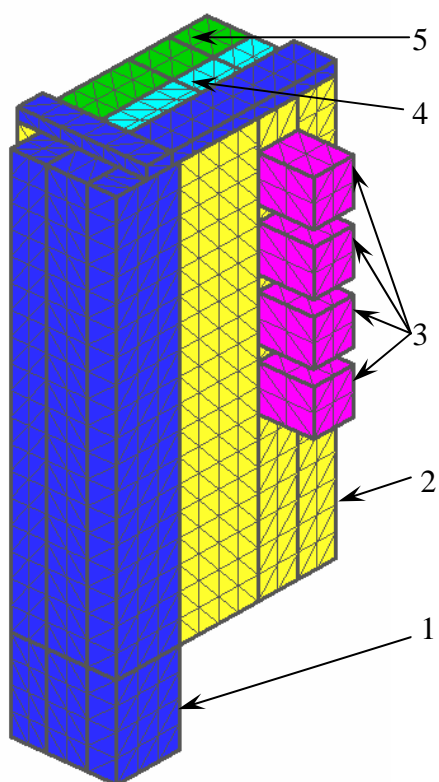
Геометричні характеристики та розрахункова сітка чисельних моделей для виконання розрахунків температурних полів в печі графітації і катодній секції показані на рис.1. Результати розрахунків нестационарних температурних полів представлені на рис. 2,3. Виконані розрахунки необхідні для: визначення температурних умов роботи струмопідводів печі Ачесона і оцінки напружено-деформованого стану струмовідводів; потужності газових пальників і терміну нагріву до заданих температур при підготовці катодних секцій до експлуатації в алюмінієвому електролізері.

Висновки

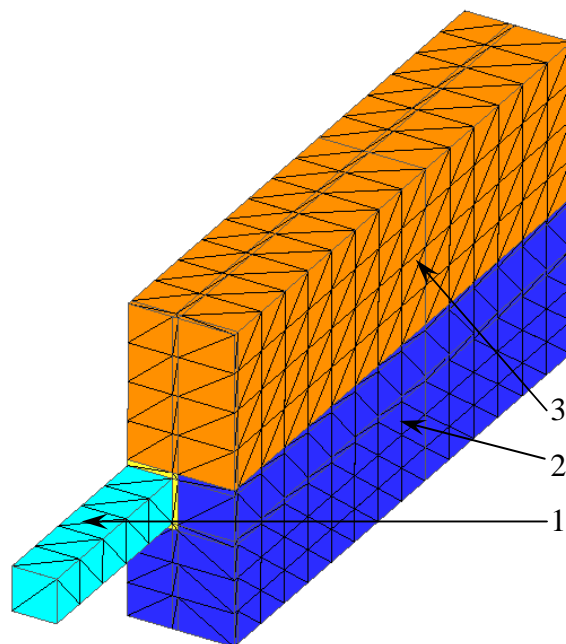
1. На базі класичного МГЕ розроблені чисельні методики розв'язання лінійного і нелінійного тривимірного рівняння теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти для різних типів початкових і граничних умов. За граничні елементи використано лінійні трикутні елементи, в яких температура за часом змінюється за лінійним законом.
2. У запропонованих чисельних методиках повністю реалізована основна ідея методу граничних елементів – нев'язка з об'єму розрахункової області перенесена на його границю. Такий підхід дозволяє уникнути дискретизації тривимірної області та зменшує об'єм арифметичних операцій.
3. На базі чисельних методик розроблено програмне забезпечення для проведення інженерних розрахунків тривимірних нестационарних полів температур і щільності теплового потоку в тілах складної форми.
4. Проведено тестування програмного забезпечення на аналітичних і чисельних розв'язках. Співставлення результатів розрахунків з даними [11,12] показує погодження в межах середньої похибки 0,5...1,5%, що є цілком прийнятним при виконанні інженерних розрахунків.
5. Виконані розрахунки нестационарних полів температур печі графітації та катодної секції алюмінієвого електролізера. Показано, що при потужності газових пальників $\sim 150\text{кВт}$ термін нагріву подового блоку з блюсом до температури $490\text{-}590^\circ\text{C}$ становить $\sim 40\text{-}50\text{хв.}$ в залежності від вмісту графіту в подовому блоці і розмірів катодної секції.

Література

1. А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферова. ANSYS в руках инженера. - М.: УРСС, 2003. - 270с.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вробел Л. Методы граничных элементов/ Пер. с англ. - М: Мир, 1987, - 524с.
3. П. Бенерджи, Р. Баттерфилд Методы граничных элементов в прикладных науках/ Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 494с.
4. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике/ Пер. с англ. - М: Мир, 1982, - 248с.
5. Boundary Element Methods in Heat Transfer / Ed: L.C. Wrobel, C.A. Brebbia - London & New York: CMP Southampton Boston & Elsevier Applied Science, 1992. - 294 p.
6. Pasquetti R., Caruso A., Wrobel L.C. Transient Problems using Time-Dependent Fundamental Solutions/ In book: Boundary Element Methods in Heat Transfer / Ed: L.C. Wrobel, C.A. Brebbia - London & New York: CMP Southampton Boston & Elsevier Applied Science, 1992. - P. 34-62.
7. Brebbia C.A., Nowak A.J. Solving Heat Transfer Problems by the Dual Reciprocity BEM / In book: Boundary Element Methods in Heat Transfer / Ed: L.C. Wrobel, C.A. Brebbia - London & New York: CMP Southampton Boston & Elsevier Applied Science, 1992. - P. 1-33.
8. Novak A.J., Solving Linear Heat Conduction Problems by the Multiple Reciprocity Method/ In book: Boundary Element Methods in Heat Transfer / Ed: L.C. Wrobel, C.A. Brebbia - London & New York: CMP Southampton Boston & Elsevier Applied Science, 1992. - p. 63-86.
9. Карвацкий А.Я., Дудников П.И., Лелека С.В., Билько В.В. Численное исследование температурных и электрических полей в алюминиевых электролизерах //Промышленная теплотехника. –2003.-Т.25-приложение к №4.-С.389-391.
10. Карвацкий А.Я., Дудніков П.Й., Лелека С.В., Жученко А.І. Застосування методу граничних елементів для розв'язання тривимірних задач теплопровідності// Наукові вісті НТУУ “КПІ”. –2005.-№5.-С.5-13.
11. Краснощеков Е.А., Сукомел А.С. Задачник по теплопередаче. –М.: Энергия. 1980.- 288 с.
12. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача /Учебн. для вузов. - М: Энергоиздат, 1981. - 416 с.

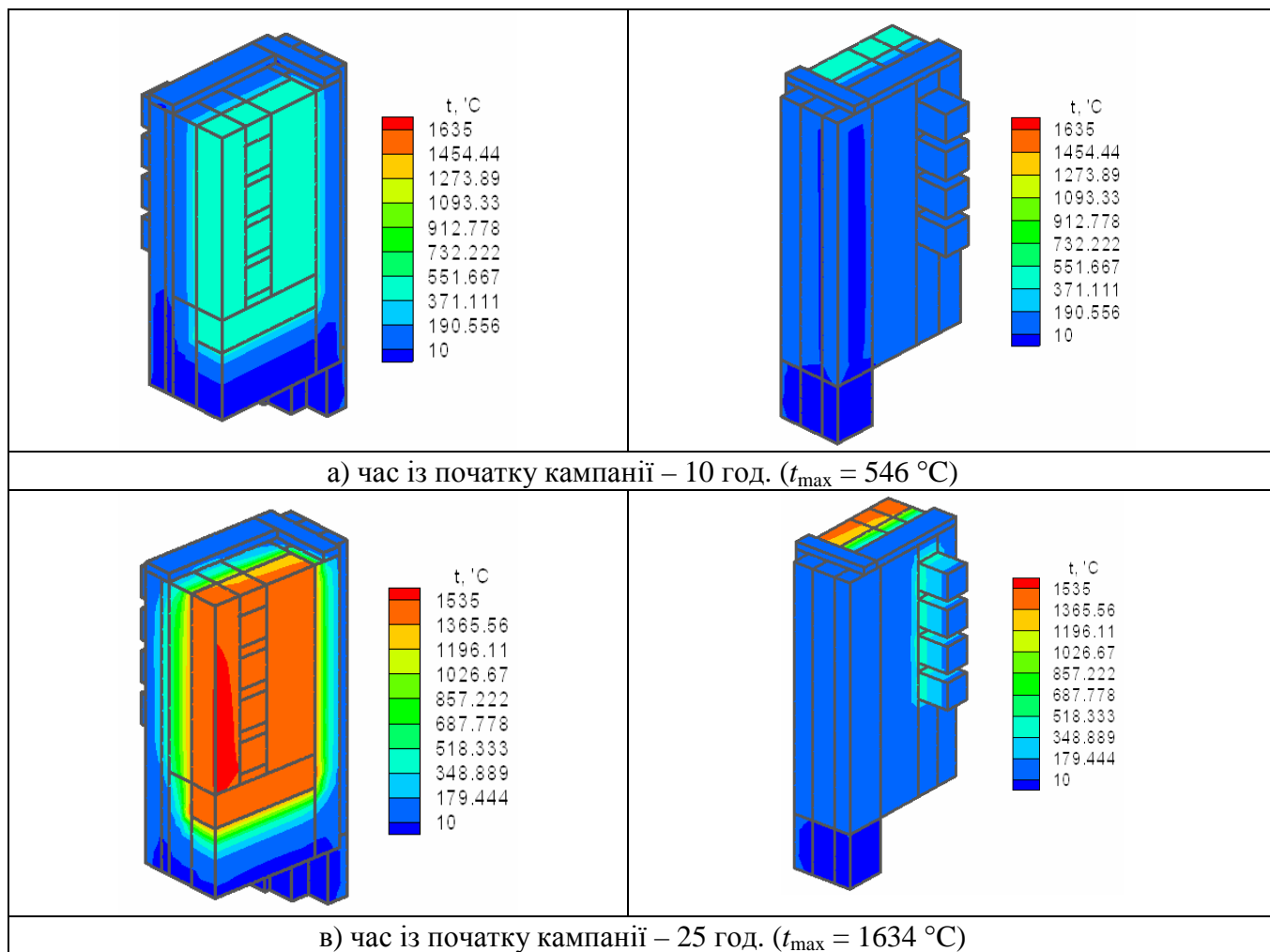


1 – залізобетонна опора; 2 – шамотна стінка; 3 – графітові струмовідводи; 4 – графітовий пил; 5 – графітова стінка.
а) $\frac{1}{2}$ торця печі графітації



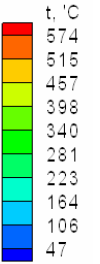
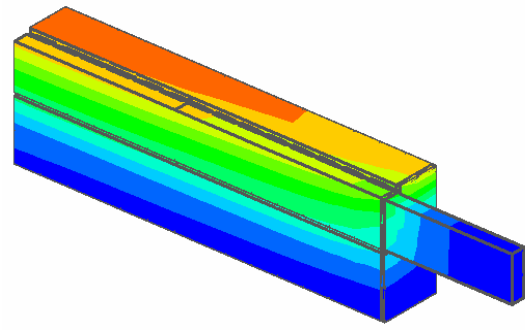
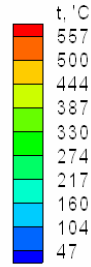
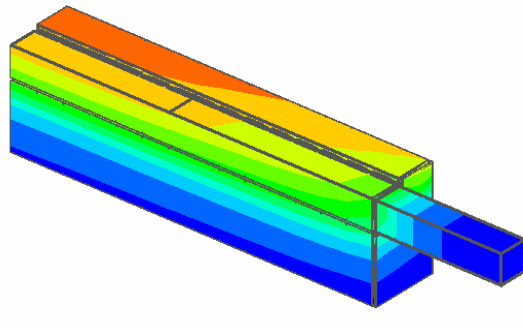
1 – сталевий б্লюмс; 2 – вуглеграфітовий блок; 3 – пальниковий вузол.
б) $\frac{1}{4}$ катодної секції

Рис. 1. Геометричні характеристики і розрахункова сітка чисельних моделей

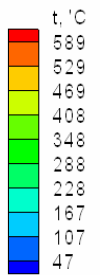
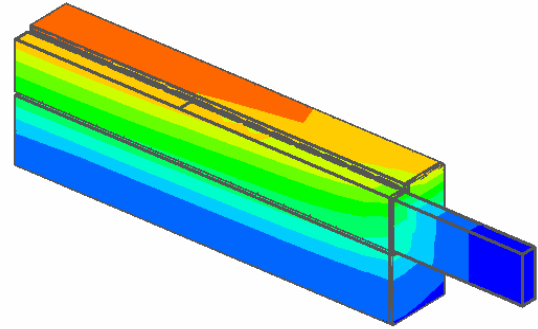
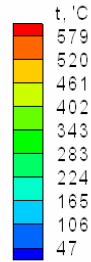
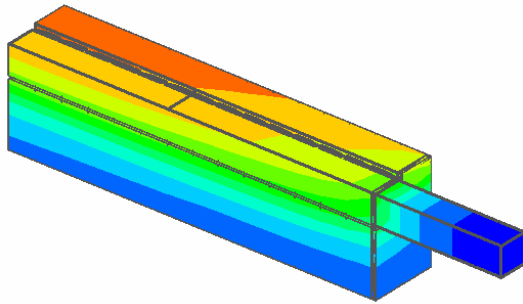


t_{\max} – максимальна температура печі на даний час.

Рис.2. Нестационарні температурні поля торцевої частини печі Ачесона під час кампанії графітації



блок і блюмс стандартних розмірів
а) термін нагріву – 40 хв., вміст графіту в ПБ – 50%, потужність газових пальників 150кВт



блок і блюмс стандартних розмірів
б) термін нагріву – 50 хв., вміст графіту в ПБ – 70%, потужність газових пальників 150кВт

Рис. 3. Температурні поля катодних секцій алюмінієвого електролізера на кінець терміну попереднього нагріву

Таблиця 1

Співставлення даних аналітичного і чисельного розв'язків нестационарної задачі теплопровідності необмеженої пластини

Тип розв'язку	Температура на осі пластини $t_{x=0}, ^\circ\text{C}$	Температура на поверхні пластини $t_{x=\delta}, ^\circ\text{C}$
Точний розв'язок [11]	47,563	25,453
Чисельний розв'язок ПМГЕ (150 вузлів)	47,835	25,305

Таблиця 2

Співставлення даних аналітичного і чисельного розв'язків нестационарної задачі теплопровідності для куба при граничних умовах конвективного типу

Час, с/год.	Аналітичний розв'язок [12], $\alpha = 5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ $t_{x=0} - t_{x=\delta}, ^\circ\text{C}$	ПМГЕ, 8 інтервалів на проміжку $\tau_F - \tau_0,$ (270 вузлів) $t_{x=0} - t_{x=\delta}, ^\circ\text{C}$	Аналітичний розв'язок [12], $\alpha = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ $t_{x=0} - t_{x=\delta}, ^\circ\text{C}$	ПМГЕ, 8 інтервалів на проміжку $\tau_F - \tau_0,$ (270 вузлів) $t_{x=0} - t_{x=\delta}, ^\circ\text{C}$
7200/ 2	13.995-21.011	13,85-20,79	63,407-81,440	62,20-80,70
14400/ 4	28.008-33.881	27,75-33,56	88,533-94,184	86,05-93,29
21600/ 6	39.739-44.655	39,28-44,17	96,407-98,177	95,07-97,49
28800/ 8	49.558-53.673	48,85-52,97	98,874-99,429	98,03-99,00
36000/10	57.777-61.221	56,80-60,28	99,647-99,821	99,18-99,59
43200/12	64.657-67.540	63,42-66,37	99,889-99,943	99,65-99,82
50400/14	70.416-72.829	68,94-71,44	99,965-99,982	99,85-99,93
57600/16	75.236-77.256	73,56-75,69	99,989-99,994	99,94-99,97
64800/18	79.271-80.962	77,43-79,25	99,996-99,998	99,98-99,99
72000/20	82.649- 84.064	80,69-82,65	99,998-99,999	100-100

Таблиця 3

Співставлення даних аналітичного і чисельного розв'язків стаціонарної задачі теплопровідності при наявності внутрішнього джерела теплоти

Тип розв'язку	Температура в центрі куба $t_{x=0}, ^\circ\text{C}$	Температура поверхні куба $t_{x=\delta}, ^\circ\text{C}$	Щільність теплового потoku $q, \text{Вт}/\text{м}^2$
Точний розв'язок [12]	354,46	287,50	3750
Чисельний розв'язок ПМГЕ (750 вузлів)	354,88	288,61	3783